DELHI UNIVERSITY
LIBRARY

DELHI UNIVERSITY LIBRARY

Cl. No. B5 168M72
Ac. No. 230686 Date of release for loan 1 JUL 1975

This book should be returned on or before the date last stamped below. An overdue charge of 5 Paise will be collected for each day the book is kept overtime.

علم مثلث

حسب الحکم جناب ڈائرکٹر آف پبلک انسٹرکشن ملک اودھ
بابو شیتل پرشاد صاحب ہیڈ ماسٹر
گورنمنٹ اسکول ضلع اوناؤ نے
تصنیف فرمائی

[illegible]

واسطے مکاتب و مدارس سرشتۂ تعلیم اودھ کے

[illegible] عیسوی

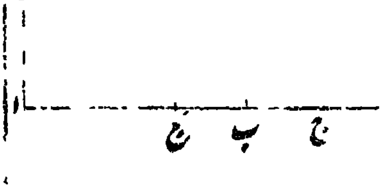
مطبع منشی نولکشور واقع لکھنؤ میں چھپا

علم مثلث

۱ خطونکی درازگی جبر و مقابلہ کی مقدارون مین لکھی جاسکتی ہے۔

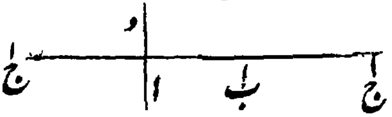
اگر ایک گرہ یا گز کو اول سے لنبائی کی اکائی مقرر کرین تو کسی خط مین یہ مقرر اور محدود خط یعنی گرہ یا گز
جتنے بار آسکے وہ اوسکی لنبائی ہے مثلاً اگر ایک گرہ کو لنبائی کی اکائی مقرر کرین تو کسی خط کو
تیس کہین گے اگر ایک گرہ اوسمین تیس دفعہ جاسکے اسیطرح سے کئی خط کو آ کہین گے اگر اکائی
لنبائی کی اوسمین آ دفعہ آسکے۔

۲ اگر اون خطوط کو جو کسی خط معینہ کے ایکطرف کہینچے جاتے ہون مثبت کہین تو اون خطوط کو
جو خط مذکور کی دوسری طرف کہینچے جاتے ہین منفی کہینگے۔



اگر ایک خط آب مین جو ا نقطہ ہی آ ونقطے کے دہنی طرف
عمود کہینچا گیا ہے دوسرا خط مفروضہ جوڑنا درکار ہو تو ظاہر ہے

کہ آب کو ج نقطہ تک بڑہانا چاہیے یہان تک کہ ب ج خط مفروضہ کی برابر ہو اور اگر اب خط سے ایک خط محدود کاٹ لینا درکار تو ب آسے ب ج ٹکڑا خط معینہ کے برابر کاٹنا چاہیے اور اج ٹکڑا باقی رہ جائیگا اگر خط اب کو ل مقرر کرین اور ب ج کو م اور ب ج = ب ج اسلیے اج + ج ب = اب، ∴ اج = اب − ج ب = ل − م اگر م بڑا ہو ل سے تب خط اج، خط آ کی بائین طرف واقع ہوگا اور خط اج = ل − م = − (م − ل) اور اسلیے − (م − ل) مقدار منفی ہے اور قدین برابر ہے خط اب و خط ب ج کی تفاوت کی جو تفاوت یعنی اج اسحالت مین خط اد کی بائین طرف واقع ہے۔



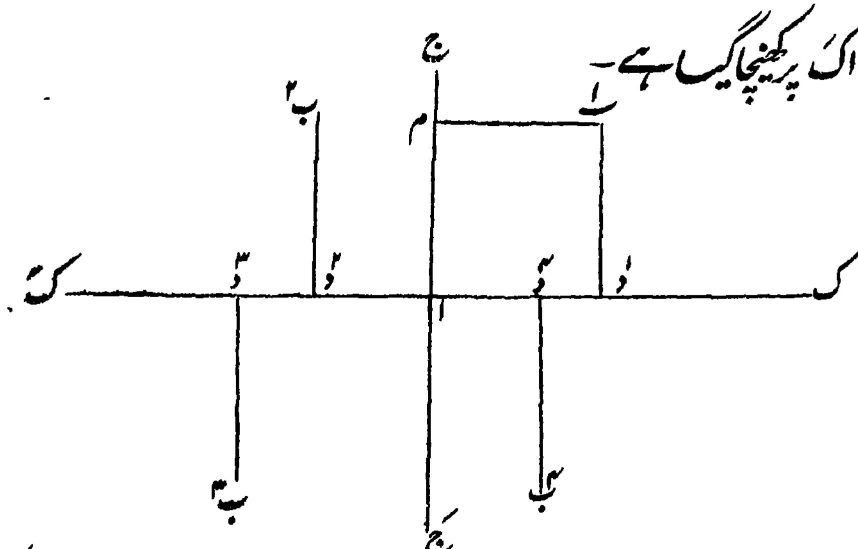
پس اگر کسی خط کی عوض مین مقدار منفی لکہین اوس سے یہ مراد ہے کہ خط مذکور واقع ہے بجانب محاذی اون خطوط کی جنکے عوض مین مقادیر منفی لکھے گئی ہین۔

۳ فرض کرو کہ خطوط ک اکَ اور ج اجَ ایک دوسرے پر عمود واقع ہین اگر مناسب سمجھو تو حسب ضرورت ان خطوط کو لاانتہا بڑہاؤ تب موقع کسی نقطہ بَ کا اندر سطح ان خطوط کے معلوم ہوسکتا ہے اگر لنبائی اون خطوط بَ دَ و بَ م کے دیا ہو (واؤ کا جواب بَ دَ و بَ م کے برابر ہے) معلوم ہو کہ جو نقطہ بَ سے خط ک اکَ اور ج اجَ پر عمود ڈالے گئے ہین۔ نقطہ بَ کے کوآرڈینیٹ کہلاتے ہین۔

نسبت اون خطوط کے جو نقطہ آ سی طرف خط ک اکَ کے کھینچے جاوین قاعدہ معمولی یہ ہے کہ وے خطوط جو خط ج اجَ کی دہنی طرف واقع ہین مثبت کہلاوینگے اور وے جو بائین طرف واقع ہین منفی۔

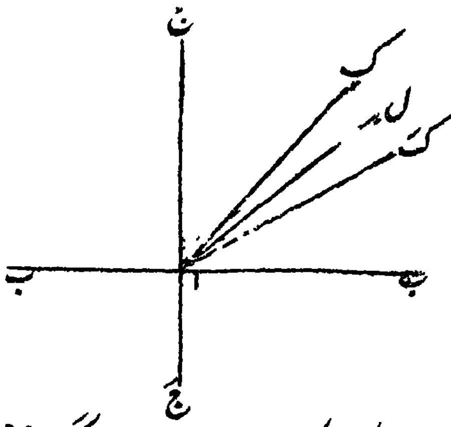
نسبت اون خطوط کے جو نقطہ آ سے خط ج آجَ پر کھینچے جاوین قاعدہ معمولی یہ ہے کہ وے خطوط جو ک اکَ کی اوپر طرف واقع ہین مثبت کہلاینگے اور جو ک اکَ کی نیچے ہو ہین منفی کہلاوینگے۔

مثلاً اگر نقطہ بَ واقع ہو اندر سطح محدود بخط اج واک تو اوسکا آرڈنیٹ خط جو ک اکَ پر کھینچا گیا ہے۔



مثبت کہلاویگا کیونکہ ج اجَ کی دہنی طرف واقع ہے اور اوسکا آرڈنیٹ بُ دُ جو کسی نقطہ ک اکَ سے آجَ کی سمت مین کھینچا گیا ہے مثبت کہلاوے گا کیونکہ دک اکَ اف

اوپر طرف واقع ہے لیکن اگر نقطہ بٓ واقع ہو اندر سطح محدود بخط اج اور اکٓ کی تو اوسکا آرڈنیٹ خط اڈ جو کٓ اکٓ پر کھینچا گیا ہے منفی کہلاوے گا کیونکہ ج آج کی بائین طرف واقع ہے اور اوسکا آرڈنیٹ خط بٓ ڈ جو کسی نقطہ کٓ اکٓ سے اج کی سمت مین کھینچا گیا ہے مثبت کہلاویگا کیونکہ وہ کٓ اکٓ کی اوپر طرف واقع ہے اسیطرح آرڈنیٹ بٓ بٓ کی جو سمت کٓ اکٓ کھینچے گئے ہین منفی اور مثبت کہلاوینگے یعنی وہ آرڈنیٹ جو ج اج کے بائین طرف واقع ہے منفی کہلاویگا اور وہ آرڈنیٹ بٓ کا جو ج اجٓ کی دہنی طرف واقع ہے مثبت کہلاویگا اور بٓ د بٓ کے آرڈنیٹ جو کسی نقطہ کٓ اکٓ سے بسمت اجٓ کھینچے گئے ہین ہر دو حالت مین منفی کہلاوینگے کیونکہ ہر دو حالت مین وہی آرڈنیٹ کٓ اکٓ کے نیچے طرف واقع ہین۔



۴ اصطلاح اگر کوئی سیدہا خط ایک ہی سطح کے اندر اپنی نقطہ انتہائی یعنی آ کی جگہ پر قائم رہ کر اپنی جگہہ معینہ یعنی اب سے کسی اور جگہہ معینہ یعنے ال تک گہومے تو خطوط اب اور ال کی حرکت کو زاویہ کہین گے اور اس زاویہ کو حروف بٓا کٓ یا کٓ آ ب سے تبلاوینگے اور حرف درمیانی ہمیشہ وہ نقطہ ہوگا جہان خطوط آب و ال ملتی ہین اگر اسیطرح کی گردش ہوتی جاوے

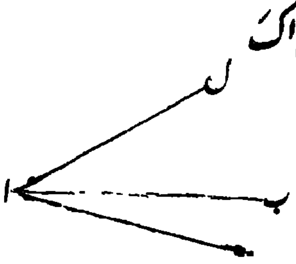
توزاویہ موعہ کسی قدر کا ہوسکتا ہے۔

۵ اگر خط اج برابر جھکا ہو جانب خط اب و اَبَ کی توزاویہ جات بٗ ج د ہ اج ہر دو قایمہ ہین۔

۶ زاویہ منفرجہ قایمہ سے بڑا ہوتا ہے اور زاویہ حادہ قایمہ سے چھوٹا ہوتا ہے۔

۷ خط ال کو خط معینہ اب سے ایک رخ مین گھمانی سے جو زاوی بنے اگر اونکو مثبت تصور کرین تو اون زاویون کو منفی کہین گے جو خط ال کو خط معینہ اب سی مختلف رخ مین گھمانے سے بنے اگر زاویہ ب اَل مین کوئی اور زاویہ جوڑنا درکار ہو تو خط ل ا کو ب ل ج کیطرف گھماوین یہان تک کہ زاویہ ل اک برابر ہو اوس زاویہ کے جسکا جوڑ منظور تھا تب زاویہ ب اَکَ زاویہ مطلوبہ کی مساوی ہوگا اور اگر زاویہ بَ ال سے کوئی دوسرا زاویہ نکالنا منظور ہے تو ظاہر ہے کہ خط لَ ا کو جانب مختلف مین گھماوین یہانتک کہ خط مذکور کَ ا کی جگہہ مین آوے اور زاویہ ک اب اوس زاویہ کی برابر ہو جسکا نکالنا منظور تھا تب لـ ل اک + لـ کَ اب = لـ ب ال

∴ لـ کَ اب = لـ ب ال ـ ل اکَ



اگر زاویہ ل اکَ بڑا ہو زاویہ ب ال سے تب خط کَ ا اب کی دوسری طرف واقع ہوگا اور لـ کَ اب = لـ ب ال ـ ل اکَ

= ـ (لـ ل اکَ ـ لـ ب ال)

ور یہ مقدار منفی ہے جس کا قدر زاویہ جات ل اگَ و ب اگَ کی تفاوت کے برابر ہے
ور یہ تفاوت اسحالت مین اب کی نیچے طرف ہے — پس اگر کسی زاویہ کو منفی کہین تو
ں سے یہہ مراد ہے کہ زاویہ مذکور گردش کنندہ خط کو اوس رخ کی ٹھیک مختلف جانب مین
وافی سے موضوع ہوا ہے جس رخ مین کہ گردش کنندہ خط کو خط معینہ اب سے گھمانی مین
اویہ جات مثبت بنین گے

۸ اہل انگلستان نے ایک زاویہ قایمہ کو برابر نوے ۹۰ حصون مین منقسم کیا ہے جنکو وے لوگ
گری کہتے ہین ایک ڈگری مین ساٹھہ ۶۰ منٹ ہوتے ہین اور ایک منٹ مین ساٹھہ ۶۰ سکنڈ
سی زاویہ کا قدر اسکے لکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ زاویہ مذکور مین کے ڈگری و منٹ و سکنڈ ہین
ر مجمع مراتب کسی زاویہ کا قدر جاننا ہووے تو حصص زاویہ جو ایک سکنڈ سے کم ہین سکنڈ کی
سر اعشاریہ مین لکھے جاینگے ڈگری و منٹ و سکنڈ یون لکھے جاتے ہین ۴° ۲ و ۰ ۵′ ″

۹ فرانس اور بر اعظم یورپ کے اور ملکونکی ریاضی والون نے ایک قایمہ کو برابر سو حصون
مین منقسم کیا ہے جنکو وے لوگ گریڈ کہتے ہین ایک گریڈ مین سو منٹ ہوتی ہین اور ایک منٹ
مین سو سکنڈ اور انکے علامات یہہ ہین ۲۶گ و ۲۴َ و ۳۲ً ک ۴۷
چونکہ ۱َ = ۱/۱۰۰ = ۰۱گ اور ۱ً = ۱َ/۱۰۰ = اگ/۱۰۰۰۰ = ۰۰۰۱گ
اصلی زاویہ مذکورہ بالا یون بھی لکھا جا سکتا ہے ۲۶٫۲۴۳۲ ۴۷ گ اس سے یہ نکلتا ہے کہ اگر تحقیق

فرانسیسی پر لکھین تو جسطرح کہ کسور اعشاریہ کا جمع تفریق وضرب تقسیم ہوتا ہے اوسیطرح اسکا بھی ہوئیگا اور یہ فائدہ انگریزی طور پر لکھنے سے نہین ملتا۔

طریق جاننے فرق درمیان انگریزی و فرانسی تقسیم کے زاویہ ب اس مین جسمین گریڈ و ڈگری ہر دو متصور ہین

بموجب تقسیم انگریزی کے $\frac{\text{انگ}}{۹۰} = \frac{\text{جیب اس}}{\text{جیب قایمہ}}$

بموجب تقسیم فرانسی کے $\frac{\text{ف گ}}{۱۰۰\,\text{گ}} = \frac{\text{جیب اس}}{\text{جیب قایمہ}}$

$\therefore \frac{\text{انگ}}{۹۰} = \frac{\text{ف}}{۱۰۰}$ اور

انگریزی $= \frac{۹}{۱۰}\text{ف} = \text{ف} - \frac{\text{ف}}{۱۰}$ ....(۱)

ف $= \frac{۱۰}{۹}\text{انگ} = \text{انگ} + \frac{\text{انگ}}{۹}$ ....(۲)

تنبیہ قاعدہ آخرین کی استعمال کرنے مین زاویہ کے منٹ و سکنڈ کو ڈگری کے کسور اعشاریہ مین رکھنا ضرور پڑے گا کیونکہ اوس جگہہ حرف انگ کے معنی انگریزی ڈگری کے ہین

تمثیل اول

زاویہ ۴۲ گ ۳۴ م و ۵۶ ث مین کتنی ڈگری و منٹ و سکنڈ ہین

ف $=$ ۴۲٫۳۴۵۶

$\frac{\text{ف}}{۱۰} =$ ۴٫۲۳۴۵۶ $=$ ۰۰٫۱۰۵۶

انگ $= \text{ف} - \frac{\text{ف}}{۱۰}$

۳۸٫۱۱۱۰۴

۶۰

۳۹٫۷۴۴

اگر ایک سکنڈ کو دسوین یا سوین حصہ کو لین اور باقی کو رد کرین

تو زاویہ ۴۲ گ ۳۴ م و ۵۶ ث برابر ہے ۳۸° ۶' و ۳۹'' ٫۷۴ کے

تمثیل دوم

زاویہ ۲۴° و ۵۱' و ۴۵" مین کتنی گریڈ و منٹ و سکنڈ ہین؟ پہلے منٹ و سکنڈ کو ایک ڈگری کے کسر عشاریہ مین لاؤ۔

۶۰) ۴۵"
۶۰) ۵۱٫۷۵'
٫۸۶۲۵

ایک = ۲۴٫۸۶۲۵
ایک/۹ = ۲٫۷۶۲۵
ایک + ایک/۹ = ۲۷٫۶۲۵۰۰

اور اس سے گریڈ = ۲۷ گ ۶۲' ۵۰"

۱۱ متمم کسی زاویہ کا وہ کہلاتا ہے جسکے ملانے سے زاویہ مذکور پورا قائمہ ہوجاوے جیسے ۹۰° ـــ ۲۴° ۳۲' = ۶۵° ۲۸' اور یہ ۲۴° ۳۲' کا متمم ہے اور اسیطرح سے ۹۰° ـــ ۱۱° و ۱۵' = ـــ (۲۰° و ۱۵') ۱۱۰° و ۱ کا متمم ہے ـ

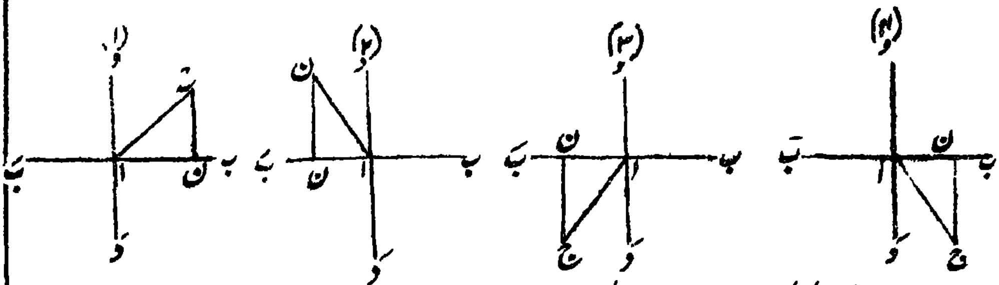
۱۲ ضمیمہ کسی زاویہ کا وہ ہے جسکے جوڑنے سے زاویہ مذکور برابر ہوجاوی دو زاویہ قائمہ کے مثلاً ۱۸۰° ـــ ۵۹° ۲۰' = ۱۲۰° ۴۰' ضمیمہ ہے ۵۹° و ۲۰' کا

باب دوسرا

بیان اصطلاحات اور چند قاعدونکا جو اون پر منحصر ہین ◆

۱۳ علم مثلث المسطح کے لغوی معنے ایسی مثلثون کی پیمایش ہے جو سطح مسطح پر واقع ہون

اور اصطلاح مین یہہ وہ علم ہے جسمین ذکر ہے اون قاعدونکا جن سے تناسبات زاویونکے معلوم ہوسکتے ہین اور جسمین ذکر ہے طریق نکالنے شکل مستقیم الاضلاع کی باقی اضلاع و زاویون کا بذریعہ ایسے اضلاع یا زاویون کے جن سے اونکا نکلنا ممکن ہو۔



۱۴ فرض کرو کہ کوئی خط مستقیم کسی خط معینہ ا بَ کے نقطہ ا کی گرد حروف ب (وَ و بَ و و) کی جہات مین گردش کرتا ہے اور درمیان اپنی گردش کے مثل خط ا ج کے واقع ہے خط ا جَ کے کسی نقطہ ج سے ایک عمود ج ن خط (ا ب) پر گراؤ اور اگر ضرور جانو تو ا ب کو کسی طرف بڑہاؤ اور نقطہ آ سے خط (و ا وَ) کو (ا بَ) پر عمود گراؤ اب بموجب دفعات ۲ دوم اور ۳ سوم کے ان اشکال مین خط ج ن کی علامات مثبت + و مثبت + و منفی و منفی ہین۔

۱۵ اصطلاحات (دفعہ ۱۴ کی اشکال دیکھو)

اصطلاح ۱ $\frac{\text{ج ن}}{\text{ا ج}}$ زاویہ ب ا ج کا (سائن) ہے یعنی سا ب ا ج = $\frac{\text{ج ن}}{\text{ا ج}}$

〃 ۲ $\frac{\text{ا ن}}{\text{ا ج}}$ زاویہ ب ا ج کا کوساس ہے کوسائن کو ب ا ج = $\frac{\text{ا ن}}{\text{ا ج}}$

〃 ۳ $\frac{\text{ن ج}}{\text{ا ن}}$ زاویہ ب ا ج کا ٹانجنٹ ہے ٹان ٹا ب ا ج = $\frac{\text{ن ج}}{\text{ا ن}}$

اصطلاح ۴ $\frac{\text{اج}}{\text{ان}}$ زاویہ ب اج کا سکینٹ ہے یا سک ∠ ب اج = $\frac{\text{اج}}{\text{ان}}$

،، ۵ (۱ – کوساین ∠ ب اج) زاویہ ب اج کا ورسڈ ساین ہے یا ورس ∠ ب اج = ۱ – کاین ∠ ب اج

،، (۶) زاویہ ب اج کے متمم کا ٹانجنٹ زاویہ ب اج کا کوٹانجنٹ کہلاتا ہے یا کوٹ (∠ ب اج) = ٹان (۹۰° – ∠ ب اج)

حاصل (۶)

اگر (۹۰° – ∠ ب اج) اصلی زاویہ ہو تو اس زاویہ کا متمم ∠ ب اج ہے (دفعہ ۱۱)

∴ کوٹ (۹۰° – ∠ ب اج) = ٹان ∠ ب اج یا ٹان ∠ ب اج = کوٹان (۹۰° – ∠ ب اج)

∴ زاویہ ب ان کی متمم کے سکینٹ کو زاویہ ب اج کا کوسکنٹ کہتے ہیں —

∴ کوسک ∠ ب اج = سک (۹۰° – ∠ ب ان)

حاصل دوم

اگر (۹۰° – ∠ ب اج) اصلی ہو تو اسکا متمم ∠ ب اج ہے (دفعہ ۱۱)

∴ کوسک (۹۰° – ∠ ب اج) = سک ∠ ب اج یا سک ∠ ب اج = کوسک (۹۰° – ب اج)

∴ زاویہ ب اج کے کوساین کو ∠ ب اج کے متمم کا ساین کہتے ہیں۔

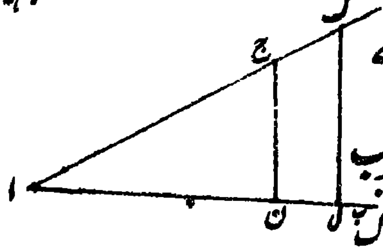
نتیجہ کوس ∠ ب اج = $\frac{\text{ان}}{\text{اج}}$ = س ∠ اج ن = س (۹۰° – ∠ ب اج) بموجب دفعہ ۹ شکل اول

اور س ذ ب اج = $\frac{\text{ن ج}}{\text{ا ج}}$ = کوس د اج ن = کوس (۹۰ - د ب اج)

یا کسی زاویہ کا ساین اوسکی متمم کی کوساین کے مساوی ہے۔

اختصار کلام کیواسطے اسوقت سے صرف ایک ہی حرف سے زاویہ تبلایا جاویگا مثلاً س ا کوس آ و ٹان ب اسجگہہ حروف آ و ب اپنی اپنی زاویون کے ڈگری تبلاتے ہین —

۱۷ — جب تک کسی زاویہ کا مقدار تبدیل نکیا جاوے تب تک اوسکی ساین کوساین وغیرہ وہی رہینگی چاہے مقدار اج کا کچھہ ہو کیونکہ اگر خط اج کی کسی دوسرے نقطہ ک سے ک ل ایک عمود ب ا پر گرایا جاوے تو بموجب



اصطلاح (ا) ساین زاویہ ا = $\frac{\text{ج ن}}{\text{ا ج}}$ یا س ا = $\frac{\text{ل ک}}{\text{ا ک}}$

(شکل دوم مقالہ ششم) لیکن بموجب خاصیت متادی مثلثون کے $\frac{\text{ج ن}}{\text{ا ج}}$ = $\frac{\text{ل ک}}{\text{ا ک}}$

یعنی س آ کا وہی رہیگا نقطہ ج خط اج مین چاہے جہان واقع ہو —

اسیطرح سے ثابت ہوسکتا ہے کہ کوس آ و س آ و ٹان آ و سک آ وغیرہ بلا تبدیل رہینگے جب تک کہ قدر زاویہ اکا تبدیل نکیا جاوے —

اس سے یہہ ثابت ہوا کہ اگر مقدار س ا یا کوس آ یا ٹان آ و یا سیک آ کے معلوم ہون توکل مقادیر زاویہ آ کے معلوم ہوسکتے ہین —

۱۸ تناسبات موسوم ساین کوساین ٹانجنٹ وغیرہ کو تناسبات مسباح الزاو

کہتے ہین چونکہ اگر انمین سے کوئی تناسب معلوم ہو تو وہ زاویہ جسکا یہہ تناسب ہے معلوم ہوسکتا ہے۔

۱۹ طریق ظاہر کرنے ورسن آ دکوٹ ا دکوسک اکو بذریعہ اضلاع مثلث اج ن (شکل ۱ دفعہ ۲)

۱ ورسن ا = ا — کوس آ

$= 1 - \frac{\text{ان}}{\text{اج}}$

۲ کوٹ ا = ٹان (۹۰° — ا)

= ٹان اج ن

$= \frac{\text{ان}}{\text{ج ن}}$

( )

۳ کوسک آ = سک (۹۰° — ا) (بموجب اصطلاح ٹانجنٹ کے)

= سک (اج ن)

$= \frac{\text{ج ا}}{\text{ج ن}}$ (بموجب اصطلاح سیکنٹ)

۲۰ طریق دریافت کرنے تبدیل علامات الجبرا یعنی مثبت یا منفی ہونا سن آ دکوس آ ٹان آ وسک آ کا او سحال مین جبکہ زاویہ آ صفر ڈگری سے ۳۶۰ ڈگری تک بڑہتا ہے۔

(۱) سن ا = $\frac{\text{ن ج}}{\text{ا ج}}$ اور اسلیے بہر حال وہی علامات ہونگے جون ج کے ہین کیونکہ اج جواب یا آوکے ۔ خ مین نہین ہی اپنی علامت کو نہین بدل سکتا اور لہذا ہمیشہ مثبت ہے

پس سن آ مثبت ہے اگر زاویہ ا صفر اور ۱۸۰° ڈگری کے بیچمین ہو (شکل اول و دوم)

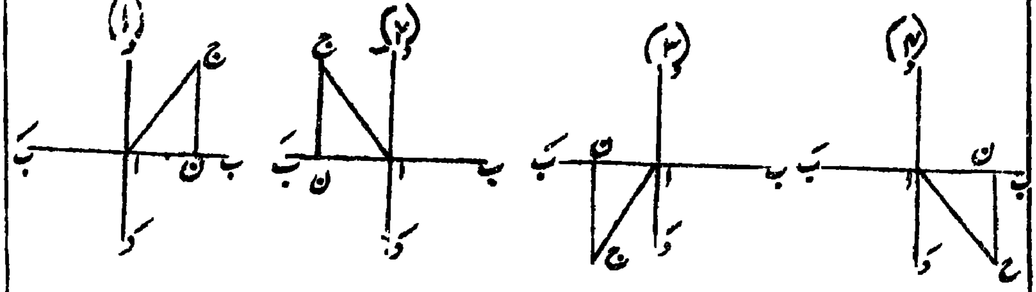
اور منفی ہے اگر زاویہ ا ۱۸۰° اور ۳۶۰° کے درمیان مین ہو (شکل سوم و چہارم)

(۲) کوس ا = $\frac{\text{ان}}{\text{اج}}$ اور اسی لیے اسکی علامات وہی ہونگے جو آن کے ہین -

پس کوس آ مثبت ہے اگر زاویہ آ صفر اور ۹۰° ڈگری کے بیچ مین ہو -

* یا ۲۷۰° اور ۳۶۰° کے درمیان مین ہو (شکل اول و چہارم)

اور کوس ا منفی ہے اگر زاویہ ا ۹۰° اور ۲۷۰° کی درمیان ہو (شکل ۲ و ۳)



(۳) ٹان ا = $\frac{\text{ن ج}}{\text{ان}}$ اور اس لیے اگر ن ج اور ان کے ایک ہی علامت ہو یعنی

اگر ان و ن ج متحد العلامت ہو تو مثبت ہے اور اگر مختلف العلامت ہو تو منفی ہے

اسی لیے ٹان آ مثبت ہے اگر زاویہ ا صفر اور ۹۰° یا ۱۸۰° اور ۲۷۰° کے درمیان ہو (اشکال اول و سوم)

اور ٹان ا منفی ہے اگر زاویہ آ ۹۰° اور ۱۸۰° یا ۲۷۰° اور ۳۶۰° کے درمیان ہو (اشکال اول و سوم)

(۴) سک آ = $\frac{\text{اج}}{\text{ان}}$ اور اسیلے اسکا وہی علامت ہے جو ان کا ہے -

پس سک ا مثبت ہی اگر زاویہ آ صفر اور ۹۰° یا ۲۷۰° اور ۳۶۰° کے درمیان ہو اور سک آ منفی ہے اگر زاویہ آ ۹۰° اور ۲۷۰° ڈگری کے درمیان ہو۔

۲۱ طریق دریافت کرنے تبدیل مقادیر ساین کوساین ٹانجنٹ وسیکنٹ کا جبکہ زاویہ صفر ڈگری سے ۳۶۰ ڈگری تک بڑہتا ہی

(اشکال متعلقہ دفعہ ۲۰)

چونکہ مقادیر ساین کوساین و ٹانجنٹ و سیکنٹ کے خط اج کی مقدار پر منحصر نہین ہین (۱۷) لہذا اس خط کی مقدار کو اوس حالت مین غیر متبدل رہنے دو جب زاویہ آ صفر ڈگری ۳۶۰ ڈگری تک بڑہتا جاوے —

(بموجب شکل ۱) چونکہ اج مقام اب سی اد کو گھومتا ہے لہذا خط ن ج مقدار مین صفر اج تک بڑہتا ہے اور اسلیے مثبت ہے اور ان اج سے صفر تک گھٹتا ہی اور مثبت ہی

(بموجب شکل ۲) اج مقام اد سی اب کو گھومتا ہے لہذا خط ان ج مقدار مین گھٹتا ہی اج سے صفر ڈگری تک اور مثبت ہے اور ان صفر سے اج تک بڑہتا ہے اور منفی ہے —

(بموجب شکل ۳) چونکہ اج مقام اب سے اد کو حرکت کرتا ہے مقادیر ن ج کی صفر سے اج تک بڑہتا ہے اور اسیلیے منفی ہے اور ان اج سے صفر تک گھٹتا ہے اور منفی ہے —

بموجب شکل ۴) چونکہ اج مقام اد سے اب کو حرکت کرتا ہے لہذا ان ج مقدار مین اج سے صفر ڈگری تک گھٹتا ہے اور منفی نہیہ اور ان صفر ڈگری سے اج تک بڑہتا ہے اور ان لیے مثبت ہے پس اس سے یہ نکلا —

جو زاویہ آ بدلتا ہے	صفر ڈگری سے ۹۰° تک	۹۰° سی ۱۸۰° تک	۱۸۰° سی ۲۷۰° تک	۲۷۰° سی ۳۶۰° تک
سن ا ($\frac{\text{ن ج}}{\text{ا ج}}$)	$\frac{\text{ن}}{\text{اج}}$ سی $\frac{+\text{اج}}{\text{اج}}$ تک	$\frac{+\text{اج}}{\text{اج}}$ سی $\frac{\text{ن}}{\text{اج}}$ تک	$\frac{\text{ن}}{\text{اج}}$ سی $\frac{-\text{اج}}{\text{اج}}$ تک	$\frac{-\text{اج}}{\text{اج}}$ سی $\frac{\text{ن}}{\text{اج}}$ تک
کوس ا ($\frac{\text{ان}}{\text{اج}}$)	$\frac{+\text{اج}}{\text{اج}}$ سی $\frac{\text{۰}}{\text{اج}}$ تک	$\frac{\text{ن}}{\text{اج}}$ سی $\frac{-\text{اج}}{\text{اج}}$ تک	$\frac{-\text{اج}}{\text{اج}}$ سی $\frac{\text{ن}}{\text{اج}}$ تک	$\frac{\text{ن}}{\text{اج}}$ سی $\frac{+\text{اج}}{\text{اج}}$ تک
ٹان ا ($\frac{\text{ن ج}}{\text{اج}}$)	$\frac{\text{ن}}{+\text{اج}}$ سی $\frac{+\text{اج}}{\text{ب}}$ تک	$\frac{+\text{اج}}{\text{ب}}$ سی $\frac{\text{ن}}{-\text{اج}}$ تک	$\frac{\text{ن}}{-\text{اج}}$ سی $\frac{-\text{اج}}{\text{ب}}$ تک	$\frac{-\text{اج}}{\text{ب}}$ سی $\frac{\text{ن}}{+\text{اج}}$ تک
سک ا ($\frac{\text{اج}}{\text{ان}}$)	$\frac{\text{اج}}{+\text{ان}}$ سی $\frac{\text{اج}}{\text{ب}}$ تک	$\frac{\text{اج}}{\text{ب}}$ سی $\frac{\text{اج}}{-\text{اج}}$ تک	$\frac{\text{اج}}{-\text{اج}}$ سی $\frac{\text{اج}}{\text{ب}}$ تک	$\frac{\text{اج}}{\text{ب}}$ سی $\frac{\text{اج}}{+\text{اج}}$ تک

ساین کوساین ٹانجنت وسیکنٹ کے تبادلات یون ہی دکھلائے جاسکتے ہین اور یہ تبادلات مقادیر وعلامات کے ہوتے ہین وہ علامات جو ہر ساین وکوساین وٹانجنٹ وغیرہ کے لیے ضرور ہین ہر ایک قاعدہ مین لگے ہوئے ہین علامت ∞ سی یہہ مراد ہے کہ وہ مقدار جسمین ایسی علامت ہے لا انتہا بڑی ہے —

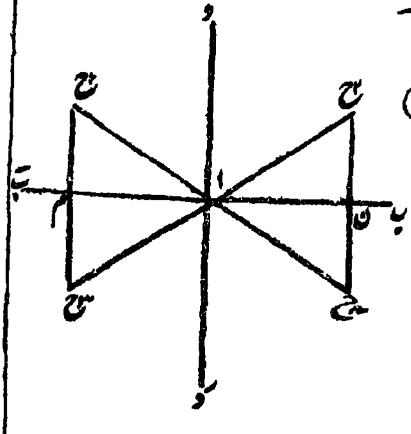
اگر زاویہ آ درمیان	صفر ڈگری اور ۹۰° کی ہو	۹۰° اور ۱۸۰° کے ہو	۱۸۰° اور ۲۷۰° کے ہو	۲۷۰° اور ۳۶۰° کے ہو
سن ا درمیان	صفر اور آ (+)	آ اور صفر (+)	صفر اور −آ (−)	−آ اور صفر (−)

کوس اور میان آ اور صفر کے ہو(+) صفر اور -۱ (-) -۱ اور صفر (-) صفر اور ۱ (+)

ٹان ا درمیان صفر ... ∞ (+) ∞ ... صفر (-) اور صفر (-) صفر ... ∞ (+) ∞ ... صفر (-)

سک آ درمیان ۱ ... ∞ (+) ∞ ... -۱ (-) -۱ ... ∞ (-) ∞ ... ۱ (+)

چونکہ کوس اعداد ایک سے کبھی بڑا نہیں ہوتا اس لیے ورس آ یا (۱ - کوس آ) ہمیشہ مثبت ہے اور جب زاویہ ۱۸۰° ڈگری کا ہوتا ہے تب اسکی مقدار سب سے بڑی ہے کیونکہ تب کوس آ = -۱ ہوتا ہے اور اس لیے ورس آ ۲ ہوتا ہے۔



۲۲ طریق تطہیر اس امر کا کہ سن ا = سن (۱۸۰° - ا)

یا = - سن (۱۸۰° + ا)

یا = - سن (۳۶۰° - ا) = - سن (- آ)

جس حالت میں زاویہ آ ایک قایمہ سے چھوٹا ہوتا ہے

فرض کرو کہ ب ا ج = آ = ب ا ج = ب ا ج = ب ا ج اور آج = ا ج = ا ج = ا ج = ا ج ج و ج ج کو ملا دو ج و ج کو ملا دو۔

آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ حروف ن و م پر کے زاوئے قایمہ ہیں اور ن ج و م ج و م ج و م ج قدرین مساوی ہیں اور علی ہذا القیاس ا ن و ا م بھی لنبائی میں برابر ہیں۔

سن ا = ن اج / ا ج = م ج / ا ج = سن ب ا ج

= سن (ب او + و اب — ب اج)

= سن (۱۸۰° — آ) ..... (۱)

سن ا = ن اج / ا ج = — م ج / ا ج ، کیونکہ ن اج = — م ج

= — م ج / ا ج

= — سن (ب او + و اب — ب اج)

= — سن (۱۸۰° + آ) ..... (۲)

سن ا = ن اج / ا ج = — ن ج / ا ج = — ن ج / ا ج

مگر ن اج / ا ج خواہ زاویہ مثبت [ب او + و اب + ب او + (و اب — ب اج)] ہے یا زاویہ منفی ب اج کا سان ہے (۶)

∴ سن ا = — سن (۳۶۰° — آ) .... (۳)

یا = — سن (— ا) .... (۴)

شرح مناسب تھا کہ اگر زاویہ جات مذکورہ بالا بصراحت لکھے جاتے تو پہلے پر لکھی جاتی

(ا و (۱۸۰ — ا)° و (۱۸۰ + ا)° وغیرہ)

۲۳ مطابق طریق مذکورہ دفعہ ۲۲ یہہ ثبوت ہو سکتا ہے کہ

(۱) کوس ا = − کوس (۱۸۰° − کو سن آ) = − کوس (۱۸۰° + آ) = کوس

(۳۶۰° − آ) = کوس (− آ) (− ا)

(۲) ٹان ا = − ٹان (۱۸۰° − آ) = ٹان (۱۸۰° + آ) = − ٹان (۳۶۰° − آ) = − ٹان

(۳) سک ا = − سک (۱۸۰° − آ) = − سک (۱۸۰° + آ) = سک (۳۶۰° − آ) = سک (− آ)

۲۴ اگر زاویہ ب ا ج مین ۳۶۰° ڈگری جوڑی جاوین تو وہ خط جن سے زاویہ مذکور محدود ہے پہلے مقام مین آجاوین گے اور زاویہ مذکور کا سائن غیر مبدل رہیگا اس لیے ہر حالت مین سن آ = سن (۳۶۰° + ا) اور علی ہذا القیاس سن (۲ × ۳۶۰° + آ) = سن (۳ × ۳۶۰° + آ) ۔ اسیلیے اگر حرف ن صحیح عدد مثبت ہو تو سن ا = سن

(ن × ۳۶۰° + آ) = سن (۲ن × ۱۸۰° + آ) . . . . . . (۱)

اسیطرح سے سن آ = سن (۱۸۰° − آ) دفعہ ۲۲ (۱)

= سن [۲ن ۱۸۰° + (۱۸۰° − آ)]

= سن {(۲ن + ۱) × ۱۸۰° − آ}

اسیطرح سے دفعہ ۲۲ کے (۳) و (۴) کی رو سے معلوم ہو سکتا ہے کہ

سن آ = − سن {(۲ن + ۱) × ۱۸۰° + آ} . . . . (۲)

سن آ = − سن {۲ن + ۱۸۰° − آ} . . . . (۴)

۲۵ — دفعہ ۲۳ کی روسے یہہ ثابت ہوتا ہے کہ

کوس آ = کوس (۲ن + ۱۸۰° + آ) یا = − کوس {(۲ن + ۱) + ۱۸۰° − آ}

یا = − کوس {(۲ن + ۱) + ۱۸۰° + آ} یا = کوس (۲ن × ۱۸۰° − آ)

اور ٹان آ = ٹان (۲ن + ۱۸۰° + آ) یا = − ٹان {(۲ن + ۱) × ۱۸۰° − آ}

یا = ٹان {(۲ن + ۱) + ۱۸۰° + آ} یا = − ٹان (۲ن × ۱۸۰° − آ)

اسیطرح سے یہہ بھی ثبوت ہوسکتا ہے کہ

سک آ = سک (۲ن + ۱۸۰° + آ) یا = − سک {(۲ن + آ) × ۱۸۰° − آ}

یا = − سک {(۲ن + ۱) × ۱۸۰° + ۱} یا = سک (۲ن + ۱۸۰° − آ) ٭

٭ دفعہ ۲۲ سے لیکر ۲۴ تک جو مساوات درمیان سن آ کوس آ و ٹان آ وغیرہ اور سن م × ۱۸۰° ± آ کے ثابت ہوئے ہین وے زاویہ آ کے کسی مقدار کی نسبت مین بغیر حوالہ کسی اور دفعہ کے ثابت ہوسکتے ہین۔

مثلاً (شکل متعلق دفعہ ۲۲ کو دیکھو)

اگر ایک خط آب اپنی جگہہ معینہ سے گھومکر دوسری حالت آج مین آوے تو اسکے گردش سے زاوی بنتے ہین فرض کرو کہ زاویہ ب اج ا کا آب خط ابتدائی

اور آج خط انتہائی ہے تب یہہ ظاہر ہے کہ

(۱) سایں اون زاویون کے جنکے خطوط ابتدائی و انتہائی خط ب اب کے ایک ہی جانب واقع ہین متحد العلامت ہونگے۔

(۲) کوسایں اون زاویون کے جنکے خطوط ابتدائی و انتہائی و ا د کے ایک ہی جانب واقع ہون متحد العلامت ہونگے۔

(۳) ٹانجنٹ اون زاویون کے جنکے خطوط ابتدائی و انتہائی ایک ہی ربعہ دائرہ مین یا محاذی ربعہ دائرہ مین واقع ہون متحد العلامت ہونگے۔

اب اگر آ اور ۲ ن × ۱۸۰° + آ (جہان ن صحیح عدد مثبت یا منفی ہو) کے خط ابتدائی و انتہائی ایک ہی مقام پر ہین اور اسلیے آ و ۲ ن × ۱۸۰° + آ کے سایں وغیرہ ایک ہی ہین۔

اور خطوط ابتدائی و انتہائی (۲ ن + ۱) ۱۸۰° + آ کے زاویہ کے خطوط ابتدائی و انتہائی کی بڑہائی ہوئی حصے ہین اور اسلیے واقع ہونگے محاذی ربعہ دائرہ مین اور ب اب و ا د خطوط کے اوس جانب مین جو محاذی ہے اوسکے جسمین زاویہ آ کے خطوط ابتدائی و انتہائی واقع ہین اور اسلیے مقادیر سن و کوس وغیرہ کے وہی رہین گے۔

سن {(۲ ن + ۱) × ۱۸۰° + آ} = − سن آ، کوس {(۲ ن + ۱) × ۱۸۰° + آ} = − کوس آ

ٹان

ٹان {(۲ن + ۱) × ۱۸۰° + آ} = ٹان آ

آ اور –آ کی خطوط ابتدائی و انتہائی واقع ہونگی اون متصل کے ربوع دایروں مین جو داو کے ایک ہی جانب ہین ہین لیکن ب اب کی جانب محاذی مین ہین اسلیے سن (–آ) = –سن آ

کوس (–آ) = کوس آ ٹان (–آ) = –ٹان آ

اور (–آ) اور ۲ن × ۱۸۰° –آ کی خطوط ابتدائی و انتہائی ایک ہی ہونگے اور اسلیے

سن (۲ن × ۱۸۰° – آ) = –سن آ کوس (۲ن × ۱۸۰° – آ) = کوس آ ٹان (۲ن × ۱۸۰° – آ) = –سن آ
= –ٹان آ مجموعہ نتایج متذکرہ بالا یہ ہے۔

سن آ = سن (۲ن × ۱۸۰° + آ) = سن {(۲ن + ۱) × ۱۸۰° – آ} = –سن (۲ن × ۱۸۰° – آ) = –سن {(۲ن + ۱) × ۱۸۰° + آ}

کوس آ = کوس (۲ن × ۱۸۰° + آ) = کوس (۲ن × ۱۸۰° – آ) = –کوس {(۲ن + ۱) × ۱۸۰° – آ} = –کوس {(۲ن + ۱) × ۱۸۰° + آ}

ٹان آ = ٹان (۲ن × ۱۸۰° + آ) = –ٹان {(۲ن + ۱) × ۱۸۰° – آ} = –ٹان (۲ن × ۱۸۰° – آ) = ٹان {(۲ن + ۱) × ۱۸۰° + آ}

۶۷۔ دفعات ۱۶ و ۲۲ و ۲۳ کی رو سے یہ نکلتا ہے۔

سن آ = کوس (۹۰° – آ)
کوس آ = سن (۹۰° – آ)

سن آ = سن (۱۸۰° – آ)
کوس آ = –کوس (۱۸۰° – آ)

ٹان آ = کوٹ (۹۰° – آ)
سک آ = کوسک (۹۰° – آ)

ٹان آ = ٹان (۱۸۰° — آ) سک ا = سک (۱۸۰° — آ)

یعنے

سائن کسی زاویہ کا = اوس زاویہ کی متمم کی کوسائن کے

یا = سائن ضمیمہ زاویہ مذکور کے

کوسائن کسی زاویہ کا = سائن متمم اوس زاویہ کے

یا = کوسائن ضمیمہ اوس زاویہ کے

ٹانجنٹ کسی زاویہ کا = اوس زاویہ کے متمم کی کوٹانجنٹ کے

یا = اوسکی ضمیمہ کے ٹانجنٹ کے یا = اوسکی ضمیمہ کے ٹانجنٹ

سیکنٹ کسی زاویہ کا = اوس زاویہ متمم کے کوسیکنٹ کے

یا = اوسکی متمم ضمیمہ کے سیکنٹ کے

تنبیہ تناسبات سائن کوسائن وٹانجنٹ وسیکنٹ کے

تنبیہ کسی زاویہ کے سائن وکوسائن وغیرہ اور اوسی زاویہ کے متمم کے سائن وکوسائن وغیرہ ون کے درمیان جو تناسب ہے وہ اکثر سوالون کے حل کرنے مین کام آتے ہین اور اس کتاب مین بھی مستعمل ہونگے —

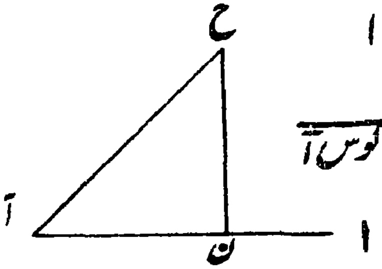
قواعد مفصلہ ذیل اکثر اس کتاب مین مفید ہونگے

س آ = کوس (۹۰° − آ) = کوس {۱۸۰° − (۹۰ − آ)} = − کوس (۹۰° + آ)

کوس آ = س (۹۰° − آ) = س {۱۸۰° − (۹۰° − آ)} = س (۹۰° + آ)

۲۷ قواعد مفصلہ ذیل کا بزبان کرنا نہایت ضرور ہے

(۱) ٹان آ = $\frac{\text{ج ن}}{\text{ا ن}}$ = $\frac{\frac{\text{ج ن}}{\text{ا ج}}}{\frac{\text{ا ن}}{\text{ا ج}}}$ = $\frac{\text{س آ}}{\text{کوس آ}}$



(۲) سک آ = $\frac{\text{آ ج}}{\text{آ ن}}$ = $\frac{۱}{\frac{\text{ا ن}}{\text{ا ج}}}$ = $\frac{۱}{\text{کوس آ}}$ ∴ کوس آ = $\frac{۱}{\text{سک آ}}$

(۳) کوٹ آ = $\frac{\text{آ ن}}{\text{ن ج}}$ = $\frac{\frac{\text{ا ن}}{\text{ا ج}}}{\frac{\text{ن ج}}{\text{ا ج}}}$ = $\frac{\text{کوس آ}}{\text{س آ}}$

(۴) کوٹ آ = $\frac{\text{ان ح}}{\text{ن ج}}$ = $\frac{۱}{\frac{\text{ن ح}}{\text{آن}}}$ = $\frac{۱}{\text{ٹان آ}}$ ∴ ٹان آ = $\frac{۱}{\text{کوٹ آ}}$

(۵) کوسک آ = $\frac{\text{اح}}{\text{ن ح}}$ = $\frac{۱}{\frac{\text{ن ح}}{\text{اح}}}$ = $\frac{۱}{\text{س آ}}$ ∴ س آ = $\frac{۱}{\text{کوسک آ}}$

(۶) اج^۲ = ن ج^۲ + ان^۲ ∴ ۱ = $\left(\frac{\text{ن ج}}{\text{ا ج}}\right)^۲$ + $\left(\frac{\text{ا ن}}{\text{ا ح}}\right)^۲$

یا ۱ = (س ا)^۲ + (کوس آ)^۲ ∴ س آ = $\sqrt{(\text{۱ − کوس آ})}$

اور کوس آ = $\sqrt{(\text{۱ − س آ})}$

(۷) $\text{آج}^{2} = \text{آن}^{2} + \text{ن ج}^{2}$

$\therefore \left(\frac{\text{آج}}{\text{آن}}\right)^{2} = ۱ + \left(\frac{\text{ن ج}}{\text{آن}}\right)^{2}$ یا $\text{سک}^{2}\,\text{آ} = ۱ + \text{ٹان}^{2}\,\text{آ}$

$\therefore \text{سک آ} = \sqrt{۱ + \text{ٹان}^{2}\,\text{آ}}$ اور $\text{ٹان آ} = \sqrt{\text{سک}^{2}\,\text{آ} - ۱}$

(۸) $\text{آج}^{2} = \text{آن}^{2} + \text{ن ج}^{2}$

$\therefore \left(\frac{\text{آج}}{\text{ن ج}}\right)^{2} = \left(\frac{\text{آن}}{\text{ن ج}}\right)^{2} + ۱$ یا $\text{کوسک}^{2}\,\text{آ} = \text{کوٹان}^{2}\,\text{آ} + ۱$

$\therefore \text{کوسک آ} = \sqrt{۱ + \text{کوٹ}^{2}\,\text{آ}}$ اور $\text{کوٹ آ} = \sqrt{\text{کوسک}^{2}\,\text{آ} - ۱}$

۲۸ — اون قواعد کی روسے جو دفعہ (۲۷) مین ثابت ہوئے ہین کسی ایک تناسب (مندرجہ دفعہ ۱۵) کی مقدار بنام کسی دوسرے تناسب کے ظاہر کیجا سکتی ہے مثلاً

(۱) $\text{ٹان آ} = \frac{\text{سن آ}}{\sqrt{۱ - \text{سن}^{2}\,\text{آ}}}$ کیونکہ بموجب دفعہ (۲۷) (۱) $\text{ٹان آ} = \frac{\text{سن آ}}{\text{کوس آ}} = \frac{\text{سن آ}}{\sqrt{۱ - \text{سن}^{2}\,\text{آ}}}$

(۲) $\text{ٹان آ} = \frac{\text{سن آ}}{\text{کوس آ}} = \frac{\sqrt{۱ - \text{کوس}^{2}\,\text{آ}}}{\text{کوس آ}}$

(۳) $\text{سن آ} = \frac{\text{سن آ}}{\text{کوس آ}} \times \text{کوس آ} = \text{ٹان آ} \times \frac{۱}{\text{سک آ}} = \frac{\text{ٹان آ}}{\sqrt{۱ + \text{ٹان}^{2}\,\text{آ}}}$

۲۹ — کسی مرکب کو جزون مین کرنے کیواسطے قواعد متعلق دفعہ ۲۸ مفید ہونگے اسی قسم کی اور سوالون مین وہی طریقہ صوت کا لائق استعمال ہے مثلاً ایک زاوی کی کوساین کو بنام اوسکے کوسیکنٹ کی اور کوسیکنٹ کو بنام ورسڈ سائن کے ظاہر کرتا ہے۔

(۱) $\text{کوسن آ} = \sqrt{\text{۱} - \text{سن}^{\text{۲}}\,\text{آ}} = \sqrt{\text{۱} - \left(\frac{\text{۱}}{\text{کوسک آ}}\right)^{\text{۲}}} = \frac{\sqrt{\text{کوسک}^{\text{۲}}\,\text{ا} - \text{۱}}}{\text{کوسک ا}}$

(۲) $\text{کوسک آ} = \frac{\text{۱}}{\text{سن آ}} = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۱} - \text{کوس}^{\text{۲}}\,\text{ا}}}$

$$= \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۱} - (\text{۱} - \text{ورسن آ})^{\text{۲}}}}$$

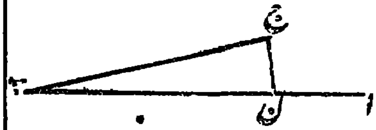
$$= \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲ ورسن آ} - \text{ورسن}^{\text{۲}}\,\text{آ}}}$$

۴۳ - مقادیر مفصلہ ذیل سن آ و کوسن آ و ٹان آ و سک آ کے یاد رکھنا مفید ہوگا -

سن آ	کوسن آ	ٹان آ	سک آ
$\sqrt{\text{۱} - \text{کوس}^{\text{۲}}\,\text{آ}}$	$\sqrt{\text{۱} - \text{سن}^{\text{۲}}\,\text{آ}}$	$\frac{\text{سن ا}}{\sqrt{\text{۱} - \text{سن}^{\text{۲}}\,\text{ا}}}$	$\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۱} - \text{سن}^{\text{۲}}\,\text{ا}}}$
$\frac{\text{ٹان آ}}{\sqrt{\text{۱} + \text{ٹان}^{\text{۲}}\,\text{آ}}}$	$\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۱} + \text{ٹان}^{\text{۲}}\,\text{آ}}}$	$\frac{\sqrt{\text{۱} - \text{کوس}^{\text{۲}}\,\text{آ}}}{\text{کوسن آ}}$	$\frac{\text{۱}}{\text{کوسن آ}}$
$\frac{\sqrt{\text{سک}^{\text{۲}}\,\text{آ} - \text{۱}}}{\text{سک آ}}$	$\frac{\text{۱}}{\text{سک ا}}$	$\sqrt{\text{سک}^{\text{۲}}\,\text{آ} - \text{۱}}$	$\sqrt{\text{۱} + \text{ٹان}^{\text{۲}}\,\text{ا}}$

۴۴ اگر زاویہ آ نصف قائمہ یعنی ۴۵ ڈگری سے چھوٹا ہو تو کوسن آ سن آ سے بڑا ہے

فرض کرو کہ زاویہ ن ا ج ۴۵ ڈگری سے کم ہے چونکہ زاویہ



ن ا ج + ن ج ا = ۹۰ اسلیے ن ج آ ۴۵ ڈگری سے بڑا ہے اور ہر مثلث میں بڑی زاویہ کے سامنے کا ضلع بڑا ہوتا ہے (مقالہ اول شکل ۱۹) اس لیے آن

براہے ن ج سے

∴ $\frac{\text{ان}}{\text{اج}}$ براہے $\frac{\text{ن ج}}{\text{اج}}$ سے یعنی کوس آ سن آ اسیطرح سے ثابت ہوسکتا ہے کہ کوساین اون زاویون کا جو ۴۵° اور ۹۰° کی درمیان ہین اونکی ساین چھوٹے ہوتی ہین

۳۲۔ ۳۰° و ۴۵° اور ۶۰° کے زاویون کا ساین کوساین و ٹانجنٹ دریافت کرو۔

(۱) بموجب شکل دفعہ ۲۴ کے فرض کرو کہ زاویہ ن ا ج = ۴۵° ∴ زاویہ ن ج ا = ۹۰° − زن اج = ۴۵°

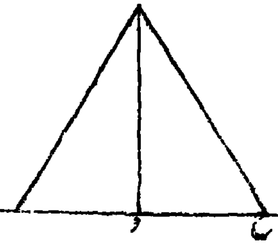
∴ ان = ن ج اور $\frac{\text{ان}}{\text{اج}} = \frac{\text{ن ج}}{\text{اج}}$ یعنی ساین ۴۵° = کوس ۴۵°

∴ اج = $\sqrt{\text{ان}^2 + \text{ن ج}^2} = \sqrt{۲}\,\text{ان}$ ∴ سن ۴۵° = $\frac{\text{ان}}{\text{اج}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ اور

کوس ۴۵° = $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ٹان ۴۵° = $\frac{\text{ن ج}}{\text{ان}}$ = ۱

(۲) فرض کرو کہ اب ج مثلث متساوی الاضلاع ہے اسلیے اوسکے سب زاویہ ایک دوسرے کے برابر ہین اور اسیلیے اوسکا ہر زاویہ دو قائمون کا ایک ثلث ہے یعنی ۶۰° ڈگری کا ہے۔

ا سے ج ب پر ا د عمود گراو ∴ ب د = د ج = $\frac{۱}{۲}$ ب ج = $\frac{۱}{۲}$ اب



اور زاویہ ب ا د = زاویہ د ا ج = ۳۰°

∴ س ۳۰° = $\frac{\text{ب د}}{\text{اب}} = \frac{\frac{۱}{۲}\,\text{اب}}{\text{اب}} = \frac{۱}{۲}$

$$\text{کوس}\,۳۰^\circ = \sqrt{\{۱ - \text{سن}^۲\,۳۰\}} = \sqrt{(۱ - \tfrac{۱}{۴})} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\text{ٹان}\,۳۰^\circ = \frac{\text{سن}\,۳۰^\circ}{\text{کوس}\,۳۰^\circ} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

$$(۳)\quad \text{سن}\,۶۰^\circ = \text{کوس}\,(۹۰^\circ - ۶۰^\circ) = \text{کوسن}\,۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\text{کوس}\,۶۰^\circ = \text{سن}\,(۹۰^\circ - ۶۰^\circ) = \text{سن}\,۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$$

$$\text{ٹان}\,۶۰^\circ = \frac{\text{سن}\,۶۰^\circ}{\text{کوسن}\,۶۰^\circ} = \sqrt{۳}$$

۴۳ — مفصلۂ ذیل کے ایسی مساوات اکثر دفعہ ۲۷ کے قاعدون سے حل ہوسکتی ہین

تمثیل اول

$\text{سن}^۲\,\text{آ} + ۵\,\text{کوس}^۲\,\text{آ} = ۴۳$ اس مساوات سے سن آ کی مقدار نکالو

چونکہ $\text{کوس}^۲\,\text{آ} = ۱ - \text{س}^۲\,\text{آ}$

$\therefore\ \text{س}^۲\,\text{آ} + ۵(۱ - \text{سن}^۲\,\text{آ}) = ۳ \quad \therefore\ ۴\,\text{س}^۲\,\text{آ} = ۲$ اور $\text{سن}\,\text{آ} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$

تمثیل دوم

$\text{س}\,\text{آ} = \text{م} \times \text{سن}\,\text{ب}$ اور $\text{ٹان}\,\text{آ} = \text{ن} \times \text{ٹان}\,\text{ب}$ ان مساواتون سے سن آ و کوس ب کے مقدار نکالو سن آ کی عوض مین لا اور کوس ب کی عوض مین ی رکھو

$$\therefore\ \text{سن}\,\text{ب} = \sqrt{۱ - \text{ی}^۲}$$

$$\text{ٹان}\,\text{آ} = \frac{\text{سن}\,\text{آ}}{[illegible]} = \frac{\text{لا}}{[illegible]} \qquad ۳$$

$$\text{ٹان ب} = \frac{\sqrt{\text{۱} - \text{کوس}^{2}\,\text{ب}}}{\text{کوس ب}} = \frac{\sqrt{\text{۱} - \text{ز}^{2}}}{\text{ز}} \qquad (\text{۳۰})$$

اسلیے اصلی مساواتون کی شکل یون ہوتے ہین

$$\text{لا} = \text{م} \times \sqrt{\text{۱} - \text{ز}^{2}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{2}}} = \text{ن} \times \frac{\sqrt{\text{۱} - \text{ز}^{2}}}{\text{ز}}$$

$$\text{پس لا} = \text{سن آ} = \sqrt{\frac{\text{م}^{2} - \text{ن}^{2}}{\text{۱} - \text{ن}^{2}}} \quad \text{اور ز} = \text{کوس ب} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}\sqrt{\frac{\text{۱} - \text{م}^{2}}{\text{۱} - \text{ن}^{2}}}$$

تمثیل سوم

$$\left\{\begin{array}{l} \text{م} = \text{کوسک آ} - \text{سن آ} \\ \text{ن} = \text{سک آ} - \text{کوس آ} \end{array}\right\}$$

ان مساوات سے ایسی مساوات نکالو جنمین صرف م اور ن ہو مگر زاویہ آ نہ آوے

$$\text{مساوات اول سے م} = \frac{\text{کوس}^{2}\,\text{آ}}{\text{سن آ}} \quad \text{اور دوم سے ن} = \frac{\text{سن}^{2}\,\text{آ}}{\text{کوس آ}}$$

$$\therefore \frac{\text{ن}}{\text{م}} = \frac{\text{سن}^{3}\,\text{آ}}{\text{کوس}^{3}\,\text{آ}} = \text{ٹان}^{3}\,\text{آ} \quad \therefore \text{ٹان آ} = \frac{\text{ن}^{\frac{1}{3}}}{\text{م}^{\frac{1}{3}}}$$

$$\text{اور م}^{2} = \frac{\text{کوس}^{4}\,\text{آ}}{\text{سن}^{2}\,\text{آ}} = \frac{\text{کوس}^{2}\,\text{آ}}{\text{ٹان}^{2}\,\text{آ}} = \frac{\text{۱}}{\text{ٹان}^{2}\,\text{آ} \times \text{سک}^{2}\,\text{آ}}$$

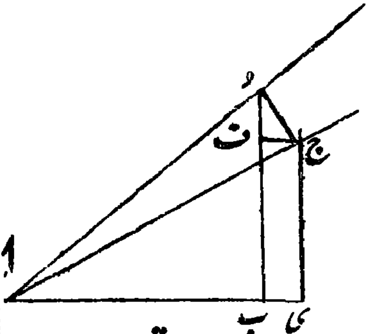
$$\therefore \text{م}^{2} \times \text{ٹان}^{2}\,\text{آ} \times (\text{۱} + \text{ٹان}^{2}\,\text{آ}) = \text{۱} \quad \text{لیکن ٹان آ} = \sqrt[3]{\frac{\text{ن}}{\text{م}}}$$

$$\therefore \text{م}^{\frac{2}{3}} \times \text{ن}^{\frac{2}{3}} \times (\text{م}^{\frac{2}{3}} + \text{ن}^{\frac{2}{3}}) = \text{۱}$$

باب تیسرا

بیان قاعدہ جات تناسب مساح الزاویہ جنمین ایک سے زیادہ زاویون کا ذکر ہے ✚

۲۴ - اگر دو زاویوں کے ساین و کوساین دی ہوئی ہوں تو انکی جمع یا تفریق کے ساین و کوساین کے نکالنے کا طریقہ



فرض کرو کہ ب اج اور ج اد زاویے ہیں جنکے عوض میں زاویہ آ و ب مستعمل ہوئے ہیں آ د کی نقطہ د سے اب و اج پر د ب و د ج عمود گراؤ اور نقطہ ج سے اب و د ب پر ج ی و ج ف عمود گراؤ تو ف ی مستطیل ہے

$$\text{ف ب} = \text{ج ی} \quad \text{اور} \quad \text{ف ج} = \text{ب ی}$$

$$\angle\,\text{ج د ف} = 90^\circ - \angle\,\text{د ج ف} = \angle\,\text{ف ج آ}$$

$$= \text{آ} \quad \text{کیونکہ}\ \overline{\text{ف ج}}\ \text{ای کا متوازی ہے}$$

اب $\text{سن}(\text{ا}+\text{ب}) = \frac{\overline{\text{ب د}}}{\text{ا د}} = \frac{\text{ب ف}+\text{ف د}}{\text{ا د}} = \frac{\overline{\text{ی ج}}}{\text{ا د}} + \frac{\text{ف د}}{\text{ا د}}$

$$= \frac{\text{ی ج}}{\text{ا ج}} \times \frac{\text{ا ج}}{\text{ا د}} + \frac{\text{ف د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{د ج}}{\text{ا د}}$$

$$= \text{سن آ} \times \text{کوس ب} + \text{کوس آ} \times \text{سن ب} \;\cdots\cdots\; (\text{۱})$$

اور $\text{کوس}(\text{ا}+\text{ب}) = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا د}} = \frac{\text{ا ی} - \text{ی ب}}{\text{ا د}} = \frac{\text{ا ی}}{\text{ا د}} - \frac{\text{ف ج}}{\text{ا د}}$

$$= \frac{\text{ا ی}}{\text{ا ج}} \times \frac{\text{ا ج}}{\text{ا د}} - \frac{\text{ف ج}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج د}}{\text{ا د}}$$

$$= \text{کوس آ} \times \text{کوس ب} - \text{سن آ} \times \text{سن ب} \;\cdots\cdots\; (\text{۲})$$

فرض کرو کہ زاویہ ب اج = آ اور زاویہ ج او = ب او کی نقطہ و سے آب و آج پر وب و وج عمود گراؤ اور نقطہ ج سے آب پر جی عمود گراؤ اور نقطہ و سے جی پر وف عمود گراؤ اسلیے ف ب مستطیل ہے فی = وب اور ف و = ی ب زاویہ وج ف = ۹۰° - زاویہ آج ی = آ

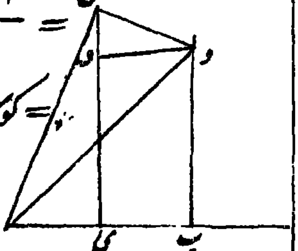
$$\text{ساین(ا - ب)} = \frac{\text{ب و}}{\text{او}} = \frac{\text{ی ج} - \text{ج ف}}{\text{آو}} = \frac{\text{ی ج}}{\text{او}} - \frac{\text{ج ف}}{\text{او}}$$

$$= \frac{\text{ی ج}}{\text{اج}} \times \frac{\text{آج}}{\text{او}} - \frac{\text{ج ف}}{\text{ج و}} \times \frac{\text{ج و}}{\text{او}}$$

$$= \text{سن ا} \times \text{کوس ب} - \text{کوس آ} \times \text{سن ب} \;\cdots\cdots\; (۳)$$

$$\text{اور کوس(آ - ب)} = \frac{\text{آب}}{\text{او}} = \frac{\text{ای} + \text{ی ب}}{\text{او}} = \frac{\text{آی}}{\text{او}} + \frac{\text{ف و}}{\text{او}}$$

$$= \frac{\text{ای}}{\text{آج}} \times \frac{\text{آج}}{\text{او}} + \frac{\text{ف و}}{\text{ج و}} \times \frac{\text{ج و}}{\text{او}}$$



$$= \text{کوس آ} \times \text{کوس ب} + \text{سن آ} \times \text{سن ب} \;\cdots\cdots\; (۴)$$

تمثیل

اگر عدد ۴۵° و ۳۰° کے ساین و کوساین دیے ہوئے ہوں تو ۷۵° و ۱۵° ڈگری کے ساین و کوساین نکالو—

$$\text{سن } ۴۵° = \text{کوس } ۴۵° = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \text{ ، سن } ۳۰° = \frac{۱}{۲} \text{ ، اور کوس } ۳۰° = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \quad (۳۲)$$

$$\text{سن } ۷۵° = \text{سن } (۴۵° + ۳۰°) = \text{سن } ۴۵° \times \text{کوس } ۳۰° + \text{کوس } ۴۵° \times \text{سن } ۳۰°$$

= $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ × $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ + $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ × $\frac{۱}{۲}$ = $\frac{۱}{۲\times\sqrt{۲}}$ × ($\sqrt{۳}$+۱)

اسیطرح سے کوس ۷۵° = کوس (۴۵° + ۳۰°) = $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$ × ($\sqrt{۳}$ − ۱)

سن ۱۵° = سن (۴۵° − ۳۰°) = $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$ × ($\sqrt{۳}$ − ۱)

کوس ۱۵° = کوس (۴۵° − ۳۰°) = $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$ × ($\sqrt{۳}$ + ۱)

۳۵ اشکال محررہ دفعہ ۳۴ مین زاویہ جات آ و ب ایک قائمہ سے کم متصور ہوتے ہین اور اونکا مجموعہ بھی علی ہذا القیاس ایک زاویہ قایمہ سے کم ہے لیکن ان زاویہ جات کے مقادیر چاہے کچھہ ہون اگر اوسیطرح سے شکل کہیچی جاوے جسطرح سے دفعہ ۳۴ مین کہیچی گئی ہے اور اگر آ و ب کی ساین و کوساین کی علامتون پر توجہ کامل مرعی ہووے تو ہمیشہ یہی نتیجہ نکلے گا مثلاً فرض کرو کہ قاعدہ مفصلہ ذیل کا ثبوت کرنا درکار ہے بذریعہ شکل مرتسمہ ذیل کے یہان ح ب ج = ح آ و ج آ د = ب یعنی ہر ایک زاویہ ایک قائمہ سے بڑا ہے

قاعدہ یہ ہے سن (آ − ب) = سن آ کوس ب − کوس آ سن ب

آ د کے کسی نقطہ د سے ج آ بڑہائی ہوئی پر د ج عمود گراو خط آ ب پر ج ی و د ف عمود گراو اور د ف کو آ ب کی متوازی کہیچو اور آ ب پر د ب عمود گراو اسلیے ف ب مستطیل ہے اور [illegible] = و ب آ = ب سن (آ − ب) = $\frac{ب و}{آ د}$ = $\frac{ی ف}{آ د}$ = $\frac{ج ف − ج ی}{آ د}$

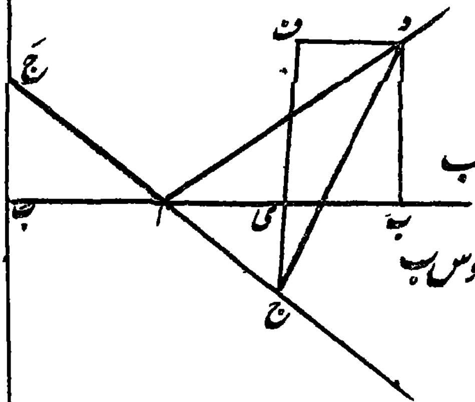
$$= \frac{\text{ج ف}}{\text{ج و}} \times \frac{\text{ج و}}{\text{ا و}} - \frac{\text{ج ی}}{\text{ا ج}} \times \frac{\text{ا ج}}{\text{ا و}}$$

= کوس فجَ د × سن دآج − سن جَ ای × کوس داج

لیکن کوس فجَ د = کوس ی اج = − کوس (۱۸۰° − جَ اب) بموجب دفعہ ۲۶

= − کوس جَ اب = − کوس آ

سن دآج = سن (۱۸۰° − داج) بموجب دفعہ ۲۶ = سن جَ آ د = سن ب



سن جَ آی = سن جَ اب = سن آ

کوس دآج = − کوس (۱۸۰° − دآج) = − کوس ب

∴ سن (ا − ب) = − کوس ا × سن ب + سن ا × کوس ب

= سن آ × کوس ب − کوس آ × سن ب

۳۶ ۔ اگر دفعہ ۳۴ کے قاعدون سے کوئی قاعدہ مثلاً سن (ا + ب) = سن ا × کوس ب + کوس ا × سن ب دیا ہوا ہو باقی قاعدے اوس سے نکل سکتے ہین کیونکہ اگر بَ (− ب) ہو جاوے ۔ تب

سن (ا − ب) = سن [آ + (− ب)] = سن آ × کوس (− ب) + کوس آ × سن (− ب)

لیکن کوس (− ب) = کوس ب دفعہ (۲۳) اور سن (− ب) = − سن ب دفعہ (۲۲)

∴ سن (ا − ب) = سن آ × کوس ب − کوس آ × سن ب

پھر کوس (ا + ب) = سن {۹۰° - (ا + ب)} . . . دفعہ (۱۶)

= سن {(۹۰° - آ) + (- ب)}

= سن (۹۰° - آ) × کوس (- ب) + کوس (۹۰° - آ) × سن (- ب)

= کوس آ × کوس ب - سن آ × سن ب

اسیطرح سے کوس (ا - ب) = کوس آ × کوس ب + سن آ × سن ب ثبوت ہو سکتا ہے

۴۷ - تین یا زیادہ زاویوں کے مجموعہ کے ساین اور کوساین کو بموجب دفعہ ۴۳ کے ہر ایک زاویہ کے کوساین و ساین سے بآسانی نکال سکتے ہین -

فرض کرو کہ ساین و کوساین زاویوں ا ب ج کا دیا ہے ان سے ساین ا + ب + ج کا نکالنا ہے

سن (ا + ب + ج) = سن {(ا + ب) + ج} = سن (ا + ب) × کوس ج + کوس (ا + ب) × سن ج

= سن ا × کوس ب × کوس ج + سن ب × کوس ا × کوس ج + کوس آ × کوس ب × سن ج - سن ا × سن ب × سن ج

= سن آ × کوس ب × کوس ج + سن ب × کوس آ × کوس ج + سن ج × کوس ا × کوس ب - سن آ × سن ب × سن ج

اسیطرح سے سن (ا ± ب ± ج) اور کوس (ا ± ب ± ج) بنام ساین و کوساین ا ب ج کے نکالے جا سکتے ہین اور یہی قاعدہ کئی زاویوں کے مجموعہ کی نسبت مین مستعمل ہو سکتا ہے

حاصل اگر ا + ب + ج = (۲ ن + ۱) × ۹۰° جہان ن کوئی صحیح عدد ہے تو کوس (۲ ن + ۱) × ۹۰° = ۰ اسلیے مساوات مندرجہ بالا کے صورت یون ہوتی ہے -

سن ا × سن ب × سن ج = سن ا × کوس ب × کوس ج + سن ب × کوس ا × کوس ج + سن ج × کوس ا × کوس ب

اگرن = تو ا + ب + ج = ۱۸۰° اور اسلیے یہ مساوات کسی مثلث المسطح کی زاویون کے ساین وکوساین کو ظاہر کرتا ہے —

۳۸ — ثابت کرو کہ سن ۲ ا = ۲ سن آ × کوس آ

سن (ا + ب) = سن ا × کوس ب + کوس ا × سن ب اور اگر ب کے عوض مین آ لکھا جاوے تو مساوات مذکورہ کی صورت یون ہوگے

سن ۲ ا = سن آ × کوس آ + کوس آ × سن آ = ۲ سن آ × کوس آ

۳۹ — اس بات کی دریافت درکار ہے کہ کوس ۲ آ = کوس^{۲} آ − سن^{۲} آ ...... (۱)

اور کوس ۲ آ = ۲ کوس^{۲} آ − ۱ .... (۲)

اور کوس ۲ آ = ۱ − ۲ سن^{۲} آ .... (۳)

(۱) کوس (ا + ب) = کوس آ × کوس ب − سن آ × سن ب اور اگر ب کی عوض مین آ لکھین

کوس ۲ آ = کوس آ × کوس آ − سن آ × سن آ = کوس^{۲} آ − سن^{۲} آ پھر

کوس ۲ آ = کوس^{۲} آ − سن^{۲} آ اور ۱ = کوس^{۲} آ + سن^{۲} آ

∴ ۱ + کوس ۲ آ = ۲ کوس^{۲} آ اور ۱ − کوس ۲ آ = ۲ سن^{۲} آ

(۲) اسیلے کوس ۲ آ = ۲ کوس^{۲} آ − ۱

(۳) اور کوس^{۲} آ = ۱ − ۲ سن ۲ آ

(۴) اسکا ثبوت کرنا درکار ہے
کوس آ + سن آ = ± √(۱ + سن ۲ آ)
کوس آ − سن آ = ± √(۱ − سن ۲ آ)

چونکہ سن ۲ آ = ۲ سن آ × کوس آ اور ۱ = کوس^{۲} آ + سن^{۲} آ

∴ جمع و تفریق کرنے سے

۱ + ساین ۲ آ = کوس^{۲} آ + ۲ ساین آ × کوس آ + ساین ۲ آ

۱ − ساین ۲ آ = کوس^{۲} آ − ۲ ساین آ × کوس آ + ساین^{۲} آ

∴ کوس آ + سن آ = ± √(۱ + سن ۲ آ)

اور کوس آ − سن آ = ± √(۱ − سن ۲ آ)

(۵) اگر آ ۹۰ ڈگری سے کم ہو تو
کوس آ = ½ {√(۱ + سن ۲ آ) + √(۱ − سن ۲ آ)}
سن آ = ½ {√(۱ + سن ۲ آ) − √(۱ − سن ۲ آ)}

بموجب دفعہ ۱۴ کے اگر آ چھوٹا ہو ۹۰ ڈگری سے تو کوس آ اور سن آ اور وے دونوں مثبت ہیں —

∴ کوس ا + سن ا اور کوس ا - سن ا دونوں مثبت ہیں جبکہ ا چھوٹا ہے ۴۵° ڈگری سے

∴ کوس ا + سن ا = + √(۱ + سن ۲ ا) }
اور کوس ا - سن ا = + √(۱ - سن ۲ ا) } ایسلیے جمع و تفریق کرنے سے

۲ کوس ا = √(۱ + سن ۲ ا) + √(۱ - سن ۲ ا) اور ۲ سن ا = √(۱ + سن ۲ ا) - √(۱ - سن ۲ ا)

∴ کوس ا = ½ {√(۱ + سن ۲ ا) + √(۱ - سن ۲ ا)} اور سن ا = ½ {√(۱ + سن ۲ ا) - √(۱ - سن ۲ ا)}

۴۴ - مساوات دفعہ ۴۳ کے ہر حالت میں سائن و کوسائن ا کو سائن ۲ ا کے سے نکل سکتا ہے مثلاً

(۱) اگر ا ایسا زاویہ ہو جو ۴۵° سے بڑا ہے مگر ۹۰° سے چھوٹا ہے (یعنی اگر وہ ایسا زاویہ ہو جو داخل ہو سکے ۹۰ - ب میں جہاں ب چھوٹا ہے ۴۵° سے) تو کوس ا - سن ا منفی ہے اور اوسکی مقدار سن ا سے بڑی ہے اور ایسلیے مثبت ہے ایسلیے اس حالت میں کوس ا + سن ا = √(۱ + سن ۲ ا)

اور کوس ا - سن ا = - √(۱ - سن ۲ ا)

∴ کوس ا = ½ {√(۱ + سن ۲ ا) - √(۱ - سن ۲ ا)} اور سن ا = ½ {√(۱ - سن ۲ ا) + √(۱ + سن ۲ ا)} اگرچہ ظاہر میں سن ا منفی ہے لیکن یاد رکھنا چاہیے کہ سن ۲ ا (جب ۲ ا درمیان ۲۷۰° اور ۳۶۰° ہے) منفی ہے اور ایسلیے ۱ - سن ۲ ا بڑا ہے ۱ + سن ۲ ا سے اور ایسلیے سن ا مثبت ہے اور ایسی ہی ہونا چاہیے -

(۲) اگر زاویہ ا جو درمیان -۴۵° و -۹۰° کے واقع ہی منفی ہو تو کوس ا مثبت ہوگا اور سن ا ج

منفی ہے اوس سے چھوٹا ہے اسلیے دفعہ ۴۰ کے مساوات یون ہونگے ۔

$$\text{کوس ا} + \text{سن ا} = -\sqrt{(\text{۱} + \text{سن ۲ا})} \quad \text{اور} \quad \text{کوس ا} - \text{سن ا} = +\sqrt{(\text{۱} - \text{سن ۲ا})}$$

۴۳ — اگر دو زاویون کے ٹانجنٹ معلوم ہون تو اون زاویون کے جمع یا تفریق کی ٹانجنٹ نکالو

$$\text{ٹان}(\text{ا}+\text{ب}) = \frac{\text{سن}(\text{ا}+\text{ب})}{\text{کوس}(\text{ا}+\text{ب})} = \frac{\text{سن ا} \times \text{کوس ب} + \text{کوس ا} \times \text{سن ب}}{\text{کوس ا} \times \text{کوس ب} - \text{سن ا} \times \text{سن ب}}$$

اور اگر نسب نما اور شمار کنندہ کو کوس ا × کوس ب سے تقسیم کرین تو

$$\text{ٹان}(\text{ا}+\text{ب}) = \frac{\frac{\text{سن ا}}{\text{کوس ا}} + \frac{\text{سن ب}}{\text{کوس ب}}}{\text{۱} - \frac{\text{سن ا}}{\text{کوس ا}} \times \frac{\text{سن ب}}{\text{کوس ب}}} = \frac{\text{ٹان ا} + \text{ٹان ب}}{\text{۱} - \text{ٹان ا} \times \text{ٹان ب}}$$

اور اسیطرح سے

$$\text{ٹان}(\text{ا}-\text{ب}) = \frac{\text{ٹان ا} - \text{ٹان ب}}{\text{۱} + \text{ٹان ا} \times \text{ٹان ب}}$$

حاصل اول اگر ب = ا تو

$$\text{ٹان ۲ا} = \frac{\text{۲ ٹان ا}}{\text{۱} - \text{ٹان}^{2}\text{ا}}$$

حاصل دوم اگر ب = ۴۵° اور ٹان ۴۵° = ۱ تو

$$\text{ٹان}(\text{ا}+\text{۴۵}^\circ) = \frac{\text{ٹان ا} + \text{۱}}{\text{۱} - \text{ٹان ا}} \cdots\cdots\cdots (\text{۱})$$

$$= \frac{\text{۱} + \frac{\text{سن ا}}{\text{کوس ا}}}{\text{۱} - \frac{\text{سن ا}}{\text{کوس ا}}} = \frac{\text{سن ا} + \text{کوس ا}}{\text{کوس ا} - \text{سن ا}} \cdots (\text{۲})$$

حاصل سوم اسیطرح سے

$$\text{ٹان}(\text{ا}-\text{۴۵}^\circ) = \frac{\text{ٹان ا} - \text{۱}}{\text{ٹان ا} + \text{۱}} \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{۳})$$

$$= \frac{\text{سن ا} - \text{کوس ا}}{\text{سن ا} + \text{کوس ا}} \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{۴})$$

حاصل چہارم

$$\text{ٹان}(\text{ا}+\text{۴۵}^\circ) + \text{ٹان}(\text{ا}-\text{۴۵}^\circ) = \frac{\text{ٹان ا} + \text{۱}}{\text{۱} - \text{ٹان ا}} + \frac{\text{ٹان ا} - \text{۱}}{\text{۱} + \text{ٹان ا}}$$

$$= \frac{\text{۴ ٹان ا}}{\text{۱} - \text{ٹان}^{2}\text{ا}} = \text{۲ ٹان ۲ا} \cdots (\text{۵})$$

بموجب حاصل ا

اگر ا ۴۵° سے چھوٹا ہو تو چونکہ $\text{ٹان}(\text{ا}-\text{۴۵}^\circ) = \text{ٹان} - (\text{۴۵}^\circ - \text{ا}) = -\text{ٹان}(\text{۴۵}^\circ - \text{ا})$ دفعہ ۲۳

اسلیے ٹان (۴۵° + ا) — ٹان (۴۵° — ا) = ۲ ٹان ۲ا .... (۶۱)

۴۴ — ثابت کرو کہ $\frac{\text{ٹان ا + ٹان ب}}{\text{ٹان ا — ٹان ب}} = \frac{\text{سن (ا + ب)}}{\text{سن (ا — ب)}}$

$$\because \frac{\text{ٹان ا + ٹان ب}}{\text{ٹان ا — ٹان ب}} = \frac{\frac{\text{ساین ا}}{\text{کوس ا}} + \frac{\text{سن ب}}{\text{کوس ب}}}{\frac{\text{سن ا}}{\text{کوس ا}} - \frac{\text{سن ب}}{\text{کوس ب}}} = \frac{\text{سن ا × کوس ب + کوس ا × سن ب}}{\text{سن ا × کوس ب — کوس ا × سن ب}} = \frac{\text{سن (ا + ب)}}{\text{سن (ا — ب)}} \text{ دفعہ ۴۴}$$

۴۵ — اگر ٹان ا، ٹان ب، ٹان ج معلوم ہو تو ٹان (ا + ب + ج) کو دریافت کرو

$$\text{ٹان (ا + ب + ج)} = \text{ٹان } \{(\text{ا + ب}) + \text{ج}\} = \frac{\text{ٹان (ا + ب) + ٹان ج}}{\text{۱ — ٹان (ا + ب) × ٹان ج}}$$

$$= \frac{\frac{\text{ٹان ا + ٹان ب}}{\text{۱ — ٹان ا × ٹان ب}} + \text{ٹان ج}}{\text{۱} - \frac{\text{ٹان ا + ٹان ب}}{\text{۱ — ٹان ا × ٹان ب}} \text{ ٹان ج}} = \frac{\text{ٹان ا + ٹان ب + ٹان ج — ٹان ا × ٹان ب × ٹان ج}}{\text{۱ — ٹان ا × ٹان ب — ٹان ا × ٹان ج — ٹان ب × ٹان ج}}$$

اسیطرح سے اگر چار یا زیادہ زاویون کی ٹانجنٹ معلوم ہون تو اون زاویون کے مجموعہ کے ٹانجنٹ معلوم ہو سکتی ہے۔

حاصل اگر ا + ب + ج = (۲ن + ۱) ۱۸۰° جسمین ن = صفر یا کسی صحیح عدد کے تو ٹان (ا + ب + ج) = ۰ اسلیے ٹان ا + ٹان ب + ٹان ج — ٹان ا × ٹان ب × ٹان ج = ۰ یا ٹان ا + ٹان ب + ٹان ج = ٹان ا × ٹان ب × ٹان ج اور اگر ن = ۰ ∴ ا + ب + ج = ۱۸۰° اور اسلیے یہ مساوات کسی مثلث المسطح کے زاویون کے ٹانجنٹ ظاہر کرتا ہے۔

۴۶ — سن ۲ا و کوس ۲ا کو بنام ٹان ا کے ظاہر کرو۔

$$\text{سن ۲ا} = \text{۲ سن ا} \times \text{کوس ا} \;(\text{۳۸}) = \text{۲}\,\frac{\text{سن ا}}{\text{کوس ا}} \times \text{کوس}^{\text{۲}}\text{ ا}$$

$$= \frac{\text{۲ ٹان ا}}{\text{سک}^{\text{۲}}\text{ ا}} \;(\text{۲۷ و ۲}) = \frac{\text{۲ ٹان ا}}{\text{۱} + \text{ٹان}^{\text{۲}}\text{ ا}} \;(\text{بموجب دفعہ ۲۷ ضمیمہ ۲})$$

$$\text{اور کوس ۲ا} = \text{۲ کوس}^{\text{۲}}\text{ ا} - \text{۱} \;(\text{بموجب دفعہ ۳۹ و ۲}) = \frac{\text{۲}}{\text{سک}^{\text{۲}}\text{ ا}} - \text{۱}$$

$$= \frac{\text{۲}}{\text{۱} + \text{ٹان}^{\text{۲}}\text{ ا}} - \text{۱} = \frac{\text{۱} - \text{ٹان}^{\text{۲}}\text{ ا}}{\text{۱} + \text{ٹان}^{\text{۲}}\text{ ا}}$$

۴۷ — سن ۲ا و کوس ۲ا و ٹان ۲ا کے مقادیر مفصلۂ ذیل اکثر مستعمل ہیں اور انکا یاد رکھنا بہت ضرور ہے وہ بیشک ثبوت لکھے نہیں گئے باسانی موافق طرز دفعہ ۴۶ کے ثابت ہوسکتے ہیں

(۱) $\text{سن ۲ا} = \text{۲ سن ا} \times \text{کوس ا}$

(۲) $= \frac{\text{۲ ٹان ا}}{\text{۱} + \text{ٹان}^{\text{۲}}\text{ ا}}$

(۳) $= \frac{\text{۲}\sqrt{\text{سک}^{\text{۲}}\text{ ا} - \text{۱}}}{\text{سک}^{\text{۲}}\text{ ا}}$

(۴) $\text{ٹان ۲ا} = \frac{\text{۲ ٹان ا}}{\text{۱} - \text{ٹان}^{\text{۲}}\text{ ا}}$

(۱) $\text{کوس ۲ا} = \text{کوس}^{\text{۲}}\text{ ا} - \text{سن}^{\text{۲}}\text{ ا}$

(۲) $= \text{۲ کوس}^{\text{۲}}\text{ ا} - \text{۱}$

(۳) $= \text{۱} - \text{۲ سن}^{\text{۲}}\text{ ا}$

(۴) $= \frac{\text{۱} - \text{ٹان}^{\text{۲}}\text{ ا}}{\text{۱} + \text{ٹان}^{\text{۲}}\text{ ا}}$

(۵) $= \frac{\text{۲} - \text{سک}^{\text{۲}}\text{ ا}}{\text{سک}^{\text{۲}}\text{ ا}}$

۴۸ - اسیطرح سے سن ۲ا و کوس ۲ا بنام کوٹ ا کوسک ا و ورسن ا کے بطریق مفصلۂ ذیل ظاہر ہوسکتا ہے۔

$$\text{سن ۲ا} = \frac{\text{۲ کوٹ ا}}{\text{۱} + \text{کوٹ}^{\text{۲}}\text{ ا}} \;\text{یا} = \frac{\text{۲} \times \sqrt{\text{کوسک}^{\text{۲}}\text{ ا} - \text{۱}}}{\text{کوسک}^{\text{۲}}\text{ ا}} \;\text{یا} = \text{۲}(\text{۱} - \text{ورسن ا}) \times \sqrt{\text{۲ ورسن ا} - \text{ورسن}^{\text{۲}}\text{ ا}}$$

کوس ۲ا = $\frac{\text{کوٹ}^{\text{۲}}\text{ ا} - \text{۱}}{\text{کوٹ}^{\text{۲}}\text{ ا} + \text{۱}}$ یا = $\frac{\text{کوسک}^{\text{۲}}\text{ ا} - \text{۲}}{\text{کوسک}^{\text{۲}}\text{ ا}}$ یا = ۱ − ۲ (۲ ورسن ا − ورسن$^{\text{۲}}$ ا)

۴۹ — ایسے قاعدون کو نکال لنے کا سہل طریقہ یہ ہے کہ پہلے سن ۲ا و کوس ۲ا کو بنام سن ا و کوس ا کے نکالو —

مثلاً کوس ۲ا کو $\frac{\text{کوسک}^{\text{۲}}\text{ ا} - \text{۲}}{\text{کوسک}^{\text{۲}}\text{ ا}}$ کے برابر ثبوت کرنا ہے چونکہ کوس ۲ا = کوس$^{\text{۲}}$ ا − سن$^{\text{۲}}$ ا = ۱ − ۲ سن$^{\text{۲}}$ ا

اور سن ا = $\frac{\text{۱}}{\text{کوسک ا}}$ ∴ کوس ۲ا = ۱ − $\frac{\text{۲}}{\text{کوسک}^{\text{۲}}\text{ ا}}$ = $\frac{\text{کوسک}^{\text{۲}}\text{ ا} - \text{۲}}{\text{کوسک}^{\text{۲}}\text{ ا}}$

۵۰ — چونکہ سن (ا + ب) = سن ا × کوس ب + کوس ا × سن ب

اور سن (ا − ب) = سن ا × کوس ب − کوس ا × سن ب

∴ پہلے جمع و تفریق کرنے سے سن (ا + ب) + سن (ا − ب) = ۲ سن ا × کوس ب (۱)

سن (ا + ب) − سن (ا − ب) = ۲ کوس ا × سن ب (۲)

اسی طرح سے کوس (ا + ب) + کوس (ا − ب) = ۲ کوس ا × کوس ب (۳)

کوس (ا − ب) − کوس (ا + ب) = ۲ سن ا × سن ب (۴)

۵۱ — سن ا ± سن ب اور کوس ا ± کوس ب کو بنام سن و کوس $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ (ا + ب) اور $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ (ا − ب) کے نکالو

چونکہ ا = $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ (ا + ب) + $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ (ا − ب) اور ب = $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ (ا + ب) − $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ (ا − ب)

∴ سن ا = سن $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ (ا + ب) × کوس $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ (ا − ب) + کوس $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ (ا + ب) × سن $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ (ا − ب)

سن ب = سن $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ (ا + ب) کوس $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ (ا − ب) − کوس $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ (ا + ب) سن $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ (ا − ب)

∴ سن ا + سن ب = ۲ سن ½ (ا + ب) کوس ½ (ا − ب) ………… (۱)

سن ا − سن ب = ۲ کوس ½ (ا + ب) سن ½ (ا − ب) ………… (۲)

اسیطرح سے کوس ا + کوس ب = ۲ کوس ½ (ا + ب) × کوس ½ (ا − ب) …… (۳)

کوس ب − کوس ا = ۲ سن ½ (ا + ب) سن ½ (ا − ب) ………… (۴)

یہی چار قاعدے جو نہایت مفید ہین دفعہ ۵۰ سے نکل سکتے تھے اگر ا + ب کو ج (جمع) سمجھتے اور ا − ب کو ف (فرق) جس حالت مین ا = ½ (ج + ف) اور ب = ½ (ج − ف)

۵۲ − دفعہ ۵۱ کے مساوات (۲) کو مساوات (۱) سے تقسیم کرنے سے −

$$\frac{\text{سن ا − سن ب}}{\text{سن ا + سن ب}} = \frac{\text{۲ کوس ½ (ا + ب) سن ½ (ا − ب)}}{\text{۲ سن ½ (ا + ب) کوس ½ (ا − ب)}} = \frac{\text{ٹان ½ (ا − ب)}}{\text{ٹان ½ (ا + ب)}}$$

اسیطرح سے اگر دفعہ ۵۱ کے مساوات (۴) کو مساوات (۳) سے تقسیم کرین تو −

$$\frac{\text{کوس ب − کوس ا}}{\text{کوس ا + کوس ب}} = \text{ٹان ½ (ا + ب) ٹان ½ (ا − ب)}$$ اور

$$\frac{\text{سن ا ± سن ب}}{\text{کوس ا + کوس ب}} = \text{ٹان ½ (ا ± ب) اور } \frac{\text{سن ا ± ب}}{\text{کوس ب − کوس ا}} = \text{کوٹان ½ (ا ∓ ب)}$$

(دونون علامات کے اوپر والے اکٹھے اور نیچے والے اکٹھے سمجھنا چاہیے)

۵۳ − $$\text{ٹان ا ± ٹان ب} = \frac{\text{سن ا}}{\text{کوس ا}} \pm \frac{\text{سن ب}}{\text{کوس ب}} = \frac{\text{سن ا × کوس ب ± کوس ا × سن ب}}{\text{کوس ا × کوس ب}} = \frac{\text{سن (ا ± ب)}}{\text{کوس ا کوس ب}}$$

اسیطرح کوٹ ب ± کوٹ ا = $\frac{\text{سن (ا ± ب)}}{\text{سن ا سن ب}}$ (دونوں علامات کے اوپر والے اکٹھے اور نیچے والے اکٹھے سمجھنا چاہیے)

۵۴ - سن (ا + ب) سن (ا - ب) = سن^{۲} ا کوس^{۲} ب - کوس^{۲} ا سن^{۲} ب

= سن^{۲} ا (۱ - سن^{۲} ب) - (۱ - سن^{۲} ا) سن^{۲} ب

= سن^{۲} ا - سن^{۲} ب

اسیطرح سن (ا + ب) سن (ا - ب) = کوس^{۲} ب - کوس^{۲} ا

کوس (ا + ب) کوس (ا - ب) = کوس^{۲} ا - سن^{۲} ب یا = کوس^{۲} ب - سن^{۲} ا

۵۵ - ثابت کرو کہ سن ن ا + سن (ن - ۲) ا = ۲ سن (ن - ۱) ا × کوس ا

اور کوس ن ا + کوس (ن - ۲) ا = ۲ کوس (ن - ۱) ا × کوس ا

سن ن ا = سن {(ن - ۱) ا + ا} = سن (ن - ۱) ا × کوس ا + کوس (ن - ۱) ا × سن ا

سن (ن - ۲) ا = سن (ن - ۱) ا کوس ا - کوس (ن - ۱) ا سن ا

∴ سن (ن ا) + سن (ن - ۲) ا = ۲ سن (ن - ۱) ا کوس ا .... (۱)

کوس ن ا = کوس (ن - ۱) ا × کوس ا - سن (ن - ۱) ا سن ا اور

کوس (ن - ۲) ا = کوس (ن - ۱) ا کوس ا + سن (ن - ۱) ا × سن ا

∴ کوس ن ا + کوس (ن - ۲) ا = ۲ کوس (ن - ۱) ا کوس ا .... (۲)

حاصل اگر ن = ۲ تو مساوات نمبر (۱) سے سن ۲ا = ۲ سن ا × کوس ا

" " (۲) سے کوس ۲ا + ۱ = کوس۲ ا

یا کوس ۲ا = ۲ کوس۲ ا − ۱

اگر ن = ۳ تو بموجب مساوات (۱) کے سن ۳ا = ۲ سن ۲ا کوس ا − سن ا

= ۴ سن ا کوس۲ ا − سن ا = ۴ سن ا (۱ − سن۲ ا) − سن ا = ۳ سن ا − ۴ سن۳ ا

اور بموجب مساوات دوم (۲) کے کوس ۳ا = ۲ کوس ۲ا × کوس ا − کوس ا

= ۲ کوس ا (۲ کوس۲ ا − ۱) − کوس ا

= ۴ کوس۳ ا − ۳ کوس ا

اور اسیطرح سے ن کو ۴ و ۵ و ۶ وغیرہ سمجھنے سے سن ۴ا و سن ۵ا وغیرہ و کوس ۴ا و کوس ۵ا وغیرہ بنام سن ا و کوس ا کے معلوم ہو سکتے ہیں۔

۵۶ − اسیطرح سے سن ن ا − سن (ن − ۲) ا = ۲ کوس (ن − ۱) ا × سن ا (۱)

اور کوس (ن − ۲) ا − کوس ن ا = ۲ سن (ن − ۱) ا × سن ا ...... (۲)

۵۷ − دفعہ ۵۶ کے قاعدہ نمبر (۲) سے ن کو ۱ و ۲ و ۳ یا ۴ وغیرہ سمجھنے سے کوس ن ا کو بنام سن ا، سن ۲ا، سن ۳ا کے نکال سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ن کوئی مثبت صحیح عدد جفت ہے اور برابر ہے ۲م کے

∴ کوس ۲(م-۱) ل - کوس ۲م ل = ۲ سن (۲م-۱) ل سن ل

اوسیطرح کوس ۲(م-۲) ل - کوس ۲(م-۱) ل = ۲ سن (۲م-۳) ل سن ل

کوس ۲(م-۳) ل - کوس ۲(م-۲) ل = ۲ سن (۲م-۵) ل سن ل

وغیرہ وغیرہ = وغیرہ وغیرہ

کوس ۲(م-م) ل - کوس ۲{م-(م-۱)} ل = ۲ سن ل × سن ل

اسلیے جوڑنے سے چونکہ کوس ۲(م-م) ل یا کوس ۰ = ۱

۱ - کوس ۲م ل = ۲ سن ل {سن (۲م-۱) ل + سن (۲م-۳) ل + ... + سن ۳ل + سن ل}

∴ کوس ۲م ل = ۱ - ۲ سن ل {سن (۲م-۱) ل + سن (۲م-۳) ل + ... + سن ۳ل

+ سن ل} .... (۱)

اسیطرح سے اگر ن طاق ہو اور برابر ہو ۲م + ۱ کے تو

کوس (۲م+۱) ل = کوس ل - ۲ سن ل {سن ۲م ل + سن ۲(م-۱) ل + ... + سن ۴ ل

+ سن ۲ل} .... (۲)

حاصل اگر م = ۱ تو ان قاعدوں سے ظاہر ہے کہ

کوس ۲ل = ۱ - ۲ سن ل × سن ل = ۱ - ۲ سن۲ ل

کوس ۳ل = کوس ل - ۲ سن ل × سن ۲ل = کوس ل - ۲ سن ل × ۲ سن ل × کوس ل

= کوس ل - ۴ کوس ل (۱ - کوس۲ ل) = ۴ کوس۳ ل - ۳ کوس ل

۵۸ — ۱۰° و ۲۰° و ۳۰° و ۵۰° کے ساین وکوساین نکالو

سن ۳۶° = کوس (۹۰° − ۳۶°) = کوس ۵۴° اگر ا = ۱۸° تو سن ۲ا = کوس ۳ا

∴ ۲ سن ا × کوس ا = ۴ کوس۲ ا × کوس ا − ۳ کوس ا   (۵۵)

∴ ۲ سن ا = ۴ کوس۲ ا − ۳

= ۴ (۱ − سن۲ ا) − ۳

∴ ۴ سن۲ ا + ۲ سن ا = ۱

اور اس مساوات کے حل کرنے سے سن ا = (±√۵ − ۱)/۴ اور چونکہ سن ۱۸° مثبت ہے اسلیے اس مساوات کی مثبت علامات لینا چاہیے

∴ ¼ (√۵ − ۱) = ساین ۱۸° = کوساین (۹۰° − ۱۸°) = کوساین ۷۲° ... (۱)

اور کوس۲ ۱۸° = ۱ − سن۲ ۱۸° = ۱ − (۶ − ۲√۵)/۱۶ = (۱۰ + ۲√۵)/۱۶

∴ کوس ۱۸° = ¼ √(۱۰ + ۲√۵) = سن ۷۲° .... (۲)

اور سن ۵۴° = کوس ۳۶° = کوس ۲ × ۱۸° = کوس۲ ۱۸° − سن۲ ۱۸°

= (۱۰ + ۲√۵)/۱۶ − (۶ − ۲√۵)/۱۶

= ¼ (۱ + √۵) .... (۳)

کوس۲ ۵۴° = ۱ − سن۲ ۵۴° = ۱ − (۶ + ۲√۵)/۱۶ = ۱/۱۶ (۱۰ − ۲√۵)

∴ کوس ۵۴° = ¼ √(۱۰ − ۲√۵) = سن ۳۶° .... (۴)

۵۹ — دریافت کرو کہ کسی زاویہ کو بڑہنے بڑہنی سے اوسکا ساین کتنا بڑہیگا۔

فرض کرو کہ زاویہ ا مین زاویہ ط جوڑا گیا ہے اور فرض کرو کہ بہ سبب اس زیادتی کے جو زیادتی ساین ا مین ہوے اوسکے عوض مین ہ ساین ا سمجہا گیا ہے تو

ہ ساین ا = سن (ا + ط) — سن ا = سن ا کوس ط + کوس ا × سن ط — سن ا

= کوس ا × سن ط — سن ا (ا — کوس ط)

= کوس ا × سن ط (ا — ٹان ا × ۲ سن^۲ ½ ط ÷ سن ط) = ... (۳۹

= کوس ا × سن ط (ا — ٹان ا ۲ سن^۲ ½ ط ÷ ۲ سن ½ ط کوس ½ ط) =

کوس ا سن ط (ا — ٹان ا × ٹان ½ ط)

حاصل اگر ط زاویہ چہوٹا ہو تو ٹان ½ ط نہایت چہوٹا ہے اور مساوات مندرجۂ بالا مین اگر ٹان ا نہایت بڑا نہو یعنی اگر ا قریب = (۲ ن + ۱) °۹۰ نہو جہان ن برابر ہی صفر یا صحیح عدد کے) تو ٹان ا × ٹان ½ ط نہایت چہوٹا عدد ہے اور بمشابہہ صحیح عدد ایک کے اس کا لحاظ نہین ہوتا اور چہوڑ دیا جا سکتا ہے ایسلیے جس حالت مین ط نہایت چہوٹا ہے اور ا تقریب (۲ ن + ۱) °۹۰ کے نہین ہے تو ہ سن ا = کوس ا × سن ط (تقریبا)

[illegible] ظاہر ہے کہ مساوات مندرجۂ بالا مستعمل نہین ہوتا جب ا کسی مثلث کا زاویہ ہوتا ہے کیونکہ اگر ا قریب ایک قایمہ کے ہو تو زیادتی سن ا کی جو باعث ازدیاد ا

ہوتی ہے نہین دریافت ہوسکتی ہے

۶۰— اگر کوئی زاویہ بڑہ جاوے تو دریافت کرو کہ اوسکا کوساین کتنا گھٹ جاوے گا

∆ کوس ا = کوس (ا + ط) - کوس ا = کوس ا × کوس ط - سن ا × سن ط - کوس ا

= - سن ا × سن ط - کوس ا (۱ - کوس ط)

= - سن ا × سن ط (۱ + کوٹ ا × $\frac{\text{۲ سن}^{۲}\,\frac{۱}{۲}\text{ط}}{\text{سن ط}}$)

= - سن ا × سن ط (۱ + کوٹ ا × ٹان ½ ط)

حاصل ۱ - موافق بیان دفعہ ۵۹ کے اگر ط نہایت چھوٹا زاویہ ہو اور کوٹ ا نہایت بڑا نہو (یعنی اگر ا ۲ن × ۹۰° کی قریب نہو) تو کوٹ ا × ٹان ½ ط اور بمشابہ صحیح عدد ایک کے چھوڑ دیا جاسکتا ہے اور ∆ کوس ا = - سن ا × سن ط (قریب)

اس سے یہ ثابت ہے کہ اگر (۱) ط بہت چھوٹا زاویہ ہو اور (۲) ا قریب صفر یا ۱۸۰° کے نہو تو یہ مساوات اوس حالتمین مستعمل نہین ہوتا جبکہ ا کسی مثلث کا زاویہ ہے

حاصل دوم - اگر ا ۹۰° سے کم ہو تو کوس ا و سن ا دونون مثبت ہے اور اسلیے ∆ کوس ا اسحالت مین ضرور منفی ہوگا پس اون زاویون کے کوساین جو قایمی سے چھوٹے ہین گھٹتے جائین گے جون جون زاویہ بڑہتا جاوے گا۔

اگر ا ایک قایمی سے بڑا اور دو قایمون سے چھوٹا ہو تو کوس ا منفی اور سن ا

مثبت ہے اسلیے ∵ کوس ا منفی ہے پس اون زاویون کا کوساین جو ایک قائمہ سے بڑی اور دو قائمہ سے چھوٹے ہے بڑہتی جاوی گی مگر منفی رہے گی)۔

۱۱۶— اگر کوئی زاویہ بڑہ جاوے تو دریافت کرو کہ بہ سبب اوسکی بڑہنے کے اوسکا سکنٹ کتنا بڑہے گا۔

$$\Delta\,\text{سک ا} = \text{سک (ا + ط)} - \text{سک ا} = \frac{1}{\text{کوس (ا + ط)}} - \frac{1}{\text{کوس ا}}$$

$$= \frac{\text{کوس ا} - \text{کوس (ا + ط)}}{\text{کوس ا} \times \text{کوس (ا + ط)}} = \frac{\text{سن ا} \times \text{سن ط (۱ + کوٹ ا ٹان } \tfrac{1}{2}\text{ ط)}}{\text{کوس ا (کوس ا} \times \text{کوس ط} - \text{سن ا} \times \text{سن ط)}} \;\cdots(۶۰)\;(۴۴)$$

$$= \frac{\text{سن ا}}{\text{کوس ا}} \times \frac{1}{\text{کوس ا}} \times \frac{\text{سن ط}}{\text{کوس ط}} \times \frac{\text{۱ + کوٹ ا ٹان } \tfrac{1}{2}\text{ ط}}{\text{۱} - \text{ٹان ا ٹان ط}}$$

$$= \text{ٹان ا سک ا ٹان ط} \times \frac{\text{۱ + کوٹ ا ٹان } \tfrac{1}{2}\text{ ط}}{\text{۱} - \text{ٹان ا ٹان ط}}$$

حاصل اگر ط نہایت چھوٹا ہو اور ٹان ا و کوٹ ا دونون بڑی نہون (یعنی اگر ا ن ۹۰° کے قریب نہو جسمین ن صفر یا کوئی عدد مثبت یا منفی ہے) تو کوٹ ا (ٹان ½ ط) اور ٹان ا × ٹان ط دونون ایسے چھوٹے ہونگے کہ اونکا ہونا و نہونا برابر ہے لہذا اونکو الگ کر دینے سے

$$\Delta\,\text{سک ا} = \text{ٹان ا} \cdot \text{سک ا} \times \text{ٹان ط} \quad \text{(عنقریب)}$$

یاد رکھنا چاہیے کہ اگر ا کسی مثلث کا زاویہ ہووے تو یہ قاعدہ صرف اوسی حالت مین کارآمد ہو سکتا ہے جب ط نہایت چھوٹا زاویہ ہے اور ا صفر یا ۹۰° یا ۱۸۰° کے قریب نہین ہے

۶۲- اگر کوئی زاویہ بڑہ جاوے تو دریافت کرو کہ بہ سبب بڑہنے زاویہ مذکور کے اوس کا ٹانجنٹ کتنا بڑہ جاوے گا۔

$$\Delta\,\text{ٹان ا} = \text{ٹان (ا + ط)} - \text{ٹان ا} = \frac{\text{سن (ا + ط)}}{\text{کوس (ا + ط)}} - \frac{\text{سن ا}}{\text{کوس ا}}$$

$$= \frac{\text{سن (ا+ط) کوس ا} - \text{کوس (ا+ط) سن ا}}{\text{کوس ا (کوس ا} \times \text{کوس ط} - \text{سن ا} \times \text{سن ط)}}$$

مگر $\text{سن (ا + ط) کوس ا} - \text{کوس (ا+ط) سن ا} = \text{سن} \left[\text{(ا + ط)} - \text{ا} \right] = \text{سن ط}$

$$\therefore \Delta\,\text{ٹان ا} = \frac{\text{سن ط}}{\text{کوس}^2\text{ ا کوس ط (۱} - \text{ٹان ا ٹان ط)}} = \text{سک}^2\text{ ا ٹان ط} \times \frac{1}{\text{۱} - \text{ٹان ا ٹان ط}}$$

حاصل اگر ط نہایت چھوٹا ہے اور ٹان ا نہایت بڑا نہو (یعنی ا م (۲ن + ۱) ۹۰° کے قریب نہو اور یہان ن = صفر یا کسی صحیح عدد کے) تو $\Delta\,\text{ٹان ا} = \text{سک}^2\text{ ا ٹان ط}$ تخمینہ اگر ا کسی مثلث کا زاویہ ہو تو قاعدہ کارآمد نہوگا، جب زاویہ ا قریب ایک قائمہ کی ہے۔

۶۳- اگر زاویہ ا ذرا بڑہ جاوے تو اوس زاویہ کے سن کی زیادتی $\Delta = د$ ہوگی کوساین کی کمی سے بموجب اسکے کہ $\text{کوس ا}\,\Delta = \text{د سن ا}$ سے جسحالت مین ا نہایت چھوٹا یا ۹۰° کی اضعاف کی قریب نہو کیونکہ $\Delta\,\text{سن ا} = \text{کوس ا} \times \text{سن ط}$ اگر (۲ن + ۱) ۹۰° کی قریب نہو (بموجب دفعہ ۵۹ کے حاصل کی)

$\Delta\,\text{کوس ا} = -\text{سن ا} \times \text{سن ط}$ اگر ا ۲ن × ۹۰° کے قریب نہو

ایلیے (اگر ن صفر یا کوئی صحیح عدد ہو) اور اگر ا بہت چھوٹا یا عنقریب °۹۰ کی اضعاف کی نہو۔

ے سائن ا ۲ = ح (ا − ے کوس ا) ہوگا چونکہ کوس ا ۲ = ح سن ا ہے

حاصل

اون زاویوں میں جو °۹۰ ڈگری سے کم ہیں ے سن ا ۲ یا ح (ا − ے کوس ا) کا ہی جب ا °۴۵ سے کم خواہ زیادہ ہے دفعہ ۴۱ کی بموجب

۶۴ — اصطلاح $\text{ٹان}^{-1}\text{ٹ}$ سی اوس زاویہ سے مراد ہے جس زاویہ کا ٹان ٹ ہی یعنے اگر ٹ = ٹان ا تو ا = $\text{ٹان}^{-1}\text{ٹ}$

اسیطرح $\text{سن}^{-1}\text{ج}$ اور $\text{کوس}^{-1}\text{ج}$ وغیرہ سے اوس زاویہ سے مراد ہے جسکا سن ج اور جسکا کوس ج وغیرہ ہے۔

۶۵ — ثابت کرو کہ
$$\text{ٹان}^{-1}\text{ٹ}_1+\text{ٹان}^{-1}\text{ٹ}_2=\text{ٹان}^{-1}\frac{\text{ٹ}_1+\text{ٹ}_2}{1-\text{ٹ}_1\text{ٹ}_2}$$

$$\text{ٹان}^{-1}\text{ٹ}_1-\text{ٹان}^{-1}\text{ٹ}_2=\text{ٹان}^{-1}\frac{\text{ٹ}_1-\text{ٹ}_2}{1+\text{ٹ}_1\text{ٹ}_2}$$

فرض کرو کہ ا = ٹ_1 اور ٹان ب = ٹ_2

تب بموجب اصطلاح (۶۴) کی $\text{ا} = \text{ٹان}^{-1}\text{ٹ}_{1}$ اور $\text{ب} = \text{ٹان}^{-1}\text{ٹ}_{2}$

اب $\text{ٹان}(\text{ا} + \text{ب}) = \dfrac{\text{ٹان ا} + \text{ٹان ب}}{1 - \text{ٹان ا ٹان ب}}$

∴ بموجب اصطلاح $\text{ا} + \text{ب} = \text{ٹان}^{-1}\dfrac{\text{ٹان ا} + \text{ٹان ب}}{1 - \text{ٹان ا ٹان ب}}$

یا $\text{ٹان}^{-1}\text{ٹ}_{1} + \text{ٹان}^{-1}\text{ٹ}_{2} = \text{ٹان}^{-1}\dfrac{\text{ٹ}_{1} + \text{ٹ}_{2}}{1 - \text{ٹ}_{1}\text{ٹ}_{2}}$ .... (۱)

اسیطرح سے $\text{ٹان}^{-1}\text{ٹ}_{1} - \text{ٹان}^{-1}\text{ٹ}_{2} = \text{ٹان}^{-1}\dfrac{\text{ٹ}_{1} - \text{ٹ}_{2}}{1 + \text{ٹ}_{1}\text{ٹ}_{2}}$ .... (۲)

۶۶ — اگر ٹ_{1} و ٹ_{2} .... $\text{ٹ}_{ن}$ کسی زاویہ کی ٹانجنٹ ہون تب

$$\text{ٹان}^{-1}\text{ٹ}_{1} - \text{ٹان}^{-1}\text{ٹ}_{ن} = \text{ٹان}^{-1}\frac{\text{ٹ}_{1} - \text{ٹ}_{2}}{1 + \text{ٹ}_{1}\text{ٹ}_{2}} + \text{ٹان}^{-1}\frac{\text{ٹ}_{2} - \text{ٹ}_{3}}{1 + \text{ٹ}_{2}\text{ٹ}_{3}} + \dots + \text{ٹان}^{-1}\frac{\text{ٹ}_{ن-1} - \text{ٹ}_{ن}}{1 + \text{ٹ}_{ن-1}\text{ٹ}_{ن}}$$

کیونکہ $\text{ٹان}^{-1}\text{ٹ}_{1} - \text{ٹان}^{-1}\text{ٹ}_{2} = \text{ٹان}^{-1}\dfrac{\text{ٹ}_{1} - \text{ٹ}_{2}}{1 + \text{ٹ}_{1}\text{ٹ}_{2}}$

$\text{ٹان}^{-1}\text{ٹ}_{2} - \text{ٹان}^{-1}\text{ٹ}_{3} = \text{ٹان}^{-1}\dfrac{\text{ٹ}_{2} - \text{ٹ}_{3}}{1 + \text{ٹ}_{2}\text{ٹ}_{3}}$

$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots$

$\text{ٹان}^{-1}\text{ٹ}_{ن-1} - \text{ٹان}^{-1}\text{ٹ}_{ن} = \text{ٹان}^{-1}\dfrac{\text{ٹ}_{ن-1} - \text{ٹ}_{ن}}{1 + \text{ٹ}_{ن-1}\text{ٹ}_{ن}}$

∴ جوڑنے سے $\text{ٹان}^{-1}\text{ٹ}_{1} - \text{ٹان}^{-1}\text{ٹ}_{ن}$

$$= \text{ٹان}^{-1}\frac{\text{ٹ}_{1} - \text{ٹ}_{2}}{1 + \text{ٹ}_{1}\text{ٹ}_{2}} + \text{ٹان}^{-1}\frac{\text{ٹ}_{2} - \text{ٹ}_{3}}{1 + \text{ٹ}_{2}\text{ٹ}_{3}} + \dots + \text{ٹان}^{-1}\frac{\text{ٹ}_{ن-1} - \text{ٹ}_{ن}}{1 + \text{ٹان}_{ن-1}\,\text{ٹان}_{ن}}$$

۶۷ — مثلثین اون سوالون کی جو حل ہو سکتی ہین اون قاعدون سے جنکا ذکر باب دوسرے و تیسرے مین ہوا ہے ـ

(۱) ثابت کرو کہ $\frac{\text{کوس ا + سن ا}}{\text{کوس ا − سن ا}} =$ سک ۲ا + ٹان ۲ا

(اس مساوات کو ثابت کرنے کے لیے کسر کے نسب نما کو کوس ۲ا یا کوس^2 ا − سن^2 ا کی صورت مین لانا چاہیے اسیلیے نسب نما اور شمار کنندہ دونون کو شمار کنندہ سے ضرب دو تو)

$$\frac{\text{کوس ا + سن ا}}{\text{کوس ا − سن ا}} = \frac{(\text{کوس ا + سن ا})^2}{\text{کوس}^2\text{ ا − سن}^2\text{ ا}} = \frac{\text{کوس}^2\text{ ا + سن}^2\text{ ا + ۲ کوس ا سن ا}}{\text{کوس}^2\text{ ا − سن}^2\text{ ا}} = \frac{\text{۱ + سن ۲ا}}{\text{کوس ۲ا}}$$

(بموجب دفعات (۲۶ و ۲۷) اور ۳۸ و ۳۹) $= \frac{۱}{\text{کوس ۲ا}} + \frac{\text{سن ۲ا}}{\text{کوس ۲ا}} =$ سک ۲ا + ٹان ۲ا

(۲) ثابت کرو کہ کوس ۲ا $= \frac{۱}{\text{۱ + ٹان ۲ا ٹان ا}}$ (اگر اس مساوات کو الٹ دیوین تو $\frac{۱}{\text{کوس ۲ا}} =$ ۱ + ٹان ۲ا ٹان ا اگر دہنی طرف کے جز کو ا و ۲ا کے ساین و کوساین مین لا کر کسر کے صورت مین لکھین تو نسب نما کوس ۲ا × کوس ا ہوگا اور شمار کنندہ میں انہیں زاویون کے ساین اور کوساین آوینگی اسیلیے پہلی $\frac{۱}{\text{کوس ۲ا}}$ کو ایسی صورت کے کسر مین ظاہر کرنا چاہیے)

$$\frac{۱}{\text{کوس ۲ا}} = \frac{\text{کوس ا}}{\text{کوس ۲ا × کوس ا}} = \frac{\text{کوس (۲ا − ا)}}{\text{کوس ۲ا × کوس ا}}$$

$$= \frac{\text{کوس ۲ا × کوس ا + سن ۲ا × سن ا}}{\text{کوس ۲ا × کوس ا}} = ۱ + \frac{\text{سن ۲ا}}{\text{کوس ۲ا}} \times \frac{\text{سن ا}}{\text{کوس ا}}$$

$= ۱ +$ ٹان ۲ا ٹان ا $\therefore$ کوس ۲ا $= \frac{۱}{\text{۱ + ٹان ۲ا ٹان ا}}$

ذیل کی مساوانون مین وہ زاویہ دریافت کرنا ہے کہ جبن کے یا جنکے اضعاف کے ساین وغیرون سے وہ مساوات موضوع ہوئی ہین

(۳) - زاویہ ا کی وہ مقدار دریافت کرو جس سے سن ۲ا = سن ا صحیح نکلی

سن ا = سن ۲ا = ۲ سن ا × کوس ا . . . دفعہ ۳۱

∴ ۲ کوس ا = ۱ اور کوس ا = $\frac{۱}{۲}$ پس ا = ۶۰° دفعہ ۳۲

(۴) - زاویہ ب کی وہ مقدار دریافت کرو جس سے سن ا + سن (۲ ب + ا)
− سن (۲ ب − ا) = سن (ب + ا) − سن (ب − ا) صحیح نکلی

دفعہ ۵۰ کے ضمیمہ ۲ کے بموجب مساوات بالا کے صورت یون ہے —

سن ا + ۲ کوس ۲ ب × سن ا = ۲ کوس ب سن ا

∴ ۱ + ۲ کوس ۲ ب = ۲ کوس ب

∴ ۱ + ۲ (۲ کوس^{۲} ب − ۱) = ۲ کوس ب بموجب دفعہ ۳۹

اس سے یہ نکلتا ہے کہ کوس ب = $\frac{۱}{۴}$ (۱ ± $\sqrt{۵}$)

مگر بموجب دفعہ ۵۰ ضمیمہ ۳ کے $\frac{۱}{۴}$ (۱ + $\sqrt{۵}$) = کوس ۳۶° اور اوسی دفعہ کے ضمیمہ (۱) کے روسی $\frac{۱}{۴}$ (۱ − $\sqrt{۵}$) = − $\frac{۱}{۴}$ ($\sqrt{۵}$ − ۱) = − کوس ۷۲° = کوس (۱۸۰° − ۷۲°) = کوس ۱۰۸°

∴ ب = ۳۶° یا ۱۰۸°

(۵) ثابت کرو کہ ۲ کوس ۱۱° ۱۵ دقیقے = √(۲ + √(۲ + √۲))

کوس ۴۵° = ۱/√۲ اسلیئے ۲ کوس ۴۵° = √۲

∴ ۲(۲ کوس^۲ ½ × ۴۵° − ۱) = √۲ ∴ ۲ کوس ½ × ۴۵° = √(۲ + √۲)

∴ ۲ × {۲ کوس^۲ ۴۵°/(۲)^۲ − ۱} = √(۲ + √۲)

∴ ۲ کوس ۴۵°/(۲)^۳ یا ۲ کوس ۱۱° ۱۵′ = √(۲ + √(۲ + √۲))

حاصل

اگر ن مرتبہ اسی عمل کو مکرر کرتی جاویں تو ظاہر ہوگا کہ ۲ کوس ۴۵°/(۲)^ن = √(۲ + √(۲ + ...)) وغیرہ جہاں ۲ معہ علامات جذر ن + ۱ دفعہ آویگی جذر کی علامت آخر تک رہینگی

(۶) اگر لا ٹان ل = (√(۱ + لا) − ۱)(√(۱ − لا) + ۱) تو ثابت کرو کہ لا = سن ۴ل

اگر لا ٹان ل = (√(۱ + لا) − ۱)(√(۱ − لا) + ۱) × (√(۱ + لا) + ۱)/(√(۱ + لا) + ۱)

= لا × (√(۱ − لا) + ۱)/(√(۱ + لا) + ۱)

∴ √(۱ − لا) + ۱ = (√(۱ + لا) + ۱) × ٹان ل

∴ (۱ − ٹان ل)^۲ = {√(۱ + لا) × ٹان ل − √(۱ − لا)}^۲

اس سے ۲ ٹان ل = لا {۱ − ٹان^۲ ل} + ۲ √(۱ − لا^۲) × ٹان ل

∴ ۱ = لا × (۱ − ٹان^۲ ل)/(۲ ٹان ل) + √(۱ − لا^۲) ∴ √(۱ − لا^۲) = ۱ − لا × کوٹ ۲ل ......(۱)

∴ ۱ − لا^{۲} = ۱ − ۲ لا × کوٹ ۲ل + لا^{۲} × کوٹ^{۲} ۲ل

∴ لا^{۲} (۱ + کوٹ^{۲} ۲ل) − ۲ لا × کوٹ ۲ل = ۰

∴ لا = ۰ یا لا = $\frac{\text{۲ کوٹ ۲ل}}{\text{۱ + کوٹ}^{۲}\text{ ۲ل}}$ = ۲ × $\frac{\text{کوٹ ۲ل}}{\text{کوسک}^{۲}\text{ ۲ل}}$ = ۲ سن ۲ل × کوس ۲ل = سن ۴ل

(۷) ثابت کرو کہ ٹان$^{-۱}$ $\frac{۱}{۳}$ + ٹان$^{-۱}$ $\frac{۱}{۵}$ + ٹان$^{-۱}$ $\frac{۱}{۷}$ + ٹان$^{-۱}$ $\frac{۱}{۸}$ = ۴۵°

ٹان$^{-۱}$ $\frac{۱}{۳}$ + ٹان$^{-۱}$ $\frac{۱}{۵}$ = ٹان$^{-۱}$ $\frac{\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵}}{۱ - \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۵}}$ ‎.....(۶۵) = ٹان$^{-۱}$ $\frac{۴}{۷}$

اسیطرح ٹان$^{-۱}$ $\frac{۱}{۷}$ + ٹان$^{-۱}$ $\frac{۱}{۸}$ = ٹان$^{-۱}$ $\left(\frac{\frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸}}{۱ - \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۸}}\right)$ = ٹان$^{-۱}$ $\frac{۳}{۱۱}$

∴ ٹان$^{-۱}$ $\frac{۱}{۳}$ + ٹان$^{-۱}$ $\frac{۱}{۵}$ + ٹان$^{-۱}$ $\frac{۱}{۷}$ + ٹان$^{-۱}$ $\frac{۱}{۸}$

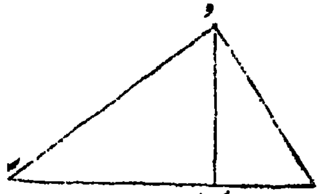
= ٹان$^{-۱}$ $\frac{۴}{۷}$ + ٹان$^{-۱}$ $\frac{۳}{۱۱}$ = ٹان$^{-۱}$ $\frac{\frac{۴}{۷} + \frac{۳}{۱۱}}{۱ - \frac{۴}{۷} \times \frac{۳}{۱۱}}$ = ٹان$^{-۱}$ $\frac{۶۵}{۶۵}$ = ٹان$^{-۱}$ ۱ = ۴۵°

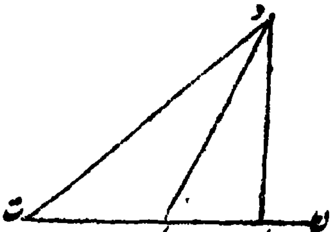
باب چہارم مثلثون کی حل کرنیکے بیان مین

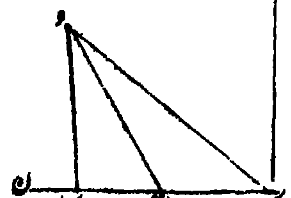
۶۹۔ مثلث چھ جزون سے مرکب ہوتا ہے یعنی تین اضلاع اور تین زاویہ ان جزون سے کوئی تین جز سوای تین زاویون کی اگر معلوم ہون تو باقی تین اکثر معلوم ہو سکتے ہین۔ مثلثون کے زاویون مین جتنی ڈگری ہون اونکو حروف و ت ر سی جو احاطہ زاویون پر لکھی گئی ہین ظاہر کرینگے اور اونکی سامنے والے ضلعون کی لمبائی کو حروف ث ڈ ر سے ظاہر کرین گے۔

۷۰۔ کسی مثلث کی زاویون کا ساین اون زاوئون کی محاذی اضلاع سے متناسب ہوتا ہے

فرض کرو کہ و ت ر ایک مثلث ہی نقطہ و سے ت ر پر یا اوسکی بڑہائی ہوئی حصہ پر و ب عمود گراو







تو سن و ت ر = سن و ت ب = $\frac{\text{و ب}}{\text{و ت}}$

تیسری شکل کی نسبت مین دفعہ ۲۶ دیکھو

اور $\text{سن ورت} = \text{سن ورب} = \frac{\text{وب}}{\text{ور}}$

$$\therefore \text{سن} \frac{\text{وت ر}}{\text{ورت}} = \frac{\text{ور}}{\text{وت}}$$

$$\therefore \frac{\text{سن ت}}{\text{سن ر}} = \frac{\text{ٹ}}{\text{ڑ}} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{سن ت}}{\text{ٹ}} = \frac{\text{سن ر}}{\text{ڑ}}$$

اسیطرح سے اگر نقطہ ر سی اوسکے مقابل کے ضلع یا ٹ یا ڑ پر یا اوسکے حصہ پر عمود ڈالین تو ثابت ہوسکتا ہے۔

$$\frac{\text{سن ت}}{\text{ٹ}} = \frac{\text{سن و}}{\text{ڈ}}$$

اسلیئے $\frac{\text{سن ت}}{\text{ٹ}} = \frac{\text{سن ر}}{\text{ڑ}} = \frac{\text{سن و}}{\text{ڈ}}$ اسمین حروف ٹ ڑ ڈ اون اعداد کی بجای رکھی گئی ہین جو اعداد ظاہر کرتے ہین کہ ایکائی ضلع کی اون ضلعون مین کے کتنے مرتبہ ہے کیونکہ بغیر اسکے سن ت اور ٹ ایک قسم کی مقدار نہین ہوسکتی ہے اور اس سبب سے اونکی درمیان کسی تناسب کا ہونا ممکن نہوگا۔

۱۷— چونکہ کسی مثلث کی تینون زاویہ ملکر برابر ہوتے ہین دو قایمہ کی اقلیدس کی مقالہ اول شکل ۳۲

$\therefore$ ت + و + ر = ۱۸۰° ڈگری اور

$$\frac{\text{سن ت}}{\text{سن ر}} = \frac{\text{ٹ}}{\text{ڑ}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{سن ر}}{\text{سن و}} = \frac{\text{ڑ}}{\text{ڈ}}$$

اور ان تین مساواتون کے ذریعہ سے اگر مثلث کی تین جز معلوم ہون تو باقی تین جز معلوم ہوسکتے ہین تین جزون معلومہ مین ایک جز ضرور ایک ضلع ہونا چاہیے

تناسب معلوم ہونگے جو ضلعون ٹ ڈ ڑ کی درمیان مین ہین اور لہذا باقی اضلاع ٹ ڈ ڑ کی معلوم ہونا غیر ممکن ہوگا کیونکہ اوس حالت مین صرف دو ہی مساوات یعنے $\frac{\text{سن ٹ}}{\text{سن ڑ}} = \frac{\text{ٹ}}{\text{ڑ}}$ اور $\frac{\text{سن ڑ}}{\text{سن ڈ}} = \frac{\text{ڑ}}{\text{ڈ}}$ واسطے دریافت کرنے تین جزو غیر معلومہ یعنی ٹ ڈ ڑ کی ہونگی اور صرف دو مساوات سے تین جزو غیر معلومہ معلوم نہین ہو سکتے ۔

ظاہر ہے کہ کسی مثلث معینہ کی گرد ایسے مثلث بیشمار ہو سکتے جنکے زاوی مثلث معینہ کے زاویون کی ڈگری کی برابر ہون اور جنکے اضلاع مثلث معینہ کی اضلاع کے متوازی ہون ۔

۲۷ ۔ صرف ایک حالت مین جسکو حالت شک کے کہتے ہین مساوات دفعہ ۱۷ سے وہ مثلث کہ جسکے تین جز معلوم ہین دریافت نہین ہو سکتا ہے ۔

اگر دو اضلاع اور ایک زاویہ مقابل ایک ضلع معلوم کسی مثلث کا یعنے اضلاع ٹ ع ڑ اور زاویہ ت معلوم ہون تو باقی ایک ضلع اور دو زاوی مثلث کی صرف اوس حالت مین معلوم ہو سکتے ہین جب کہ زاویہ معلومہ کی مقابل کا ضلع معلومہ دوسرے ضلع معلومہ سے بڑا ہو یعنی جب ضلع ٹ بڑا ہے ضلع ڑ سے ۔

مساوات دفعہ ۱۷ کی یہہ ہین ۔

$$(۱)\ \text{ر} + \text{و} = ۱۸۰^\circ - \text{ت} \qquad (۲)\ \text{سن ر} = \frac{\text{ٹر}}{\text{ٹت}} \times \text{سن ت}$$

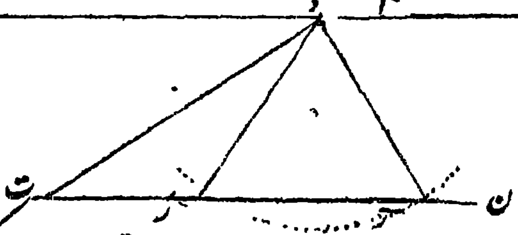
$$(۳)\ \text{ٹو} = \text{ٹر} \times \frac{\text{سن و}}{\text{سن ر}}$$

اگر ر (۲) سے معلوم ہوسکتا ہے تو وم ٹو بذریعہ مساوات (۱) اور (۳) سے معلوم ہوسکتے ہین اور کل مثلث جسکی یہہ ضلع اور زاویہ ہین معلوم ہوسکتا ہے مگر چونکہ سن کسی زاویہ کا برابر ہے سن ضمیمہ اوس زاویہ کی اسلیے زاویہ ر کے دو جواب ہین جس سے مساوات (۲) صحیح نکلتا ہے اور جن دو جوابون سے ایک جواب ۹۰° سے بڑا ہے اور دوسرا کم۔

اوّل فرض کرو کہ ٹ بڑا ہے ٹر سے ∴ ت > ر (اقلیدس کے مقالہ اول شکل ۱۸)۔ مگر ر ۹۰° سے بڑا نہین ہوسکتا کیونکہ اگر ایسا ہو تو ت + ر ۱۸۰° سے بڑا ہوگا اور یہ غیر ممکن ہے اقلیدس کے (مقالہ اول شکل ۱۷)

∴ ر < ۹۰° اور چھوٹے زاویہ کو ر کا مقدار سمجھنے سے مساوات (۲) صحیح ہوگا۔

دوم فرض کرو کہ ٹ چھوٹا ہے ٹر سے ∴ ت < ر اس حالت مین چونکہ ت + ر < ۱۸۰° اور ر > ت صحیح ہوسکتے ہین اگر ر بڑا ہو خواہ چھوٹا ہو ۹۰° سے اسلیے مساوات (۲) سے یقین معلوم ہوسکتا کہ ر بڑا ہے یا چھو



ہے ۹۰° سے مثلاً

اس شکل میں اگر د ر = د ز

تو ظاہر ہے کہ دونوں د ت ر اور د ت ز مثلثون میں ٹ ز اور ت کی مقدار ایک ہی ہے اور اس صورت میں ∠ ت چھوٹا ہے بیرونی زاویہ د ز ر سے یا بیرونی زاویہ د ر ن سے یعنی ∠ ٹ چھوٹا ہے د ر ت سے اور اس لیے چھوٹا ہی ∠ د ر ت ... اور ٹ چھوٹا ہے ز سے اور پہلے بھی یہی تبلایا گیا تھا۔

۷۲۔ ایک مثلث کی کسی زاویہ کا کوساین بنام اوسکے ضلع کی نکالو۔

(دفعہ ۷۰ کی اشکال کو دیکھو)

فرض کرو کہ ب ر د ایک مثلث ہے نقطہ د سے ت ر یا ت ر کی کسی طرف کو بڑھائے ہوئے حصہ پر د ب ایک عمود ڈالو۔

اب بموجب شکل ۱۳ مقالہ دوم کی $ت ا^2 = ت د^2 + ت ر^2 - ۲ ت ر \times ت ب$ دفعہ ۷۰ کی اشکال اول و دوم میں۔

اور شکل سوم میں $د ر^2 = ت د^2 + ت ر^2 + ۲ ت ر \times ت ب$ کیونکہ ... (شکل ۱۲ مقالہ دوم)

اور شکل اول و دوم میں $\frac{ت ب}{ت د}$ = کوس ت ب = کوس ب ت ر

= − کوس د ت ب ... شکل سوم میں بموجب دفعہ ۲۶

ایسلیے ہر ایک اِن حالتوں میں

$$\text{ور}^{\text{٢}} = \text{تو}^{\text{٢}} + \text{تر}^{\text{٢}} - \text{٢}\,\text{تر} \times \text{تو} \times \text{کوس وتر}$$

$$\therefore \text{کوس وتر} = \frac{\text{تو}^{\text{٢}} + \text{تر}^{\text{٢}} - \text{ور}^{\text{٢}}}{\text{٢ تر} \times \text{تو}} \quad \text{یعنے کوس ت} = \frac{\text{ڑ}^{\text{٢}} + \text{ڈ}^{\text{٢}} - \text{ٹ}^{\text{٢}}}{\text{٢ڑ} \times \text{ڈ}}$$

٧٤ — ظاہر کرو کہ $\text{کوس}\,\tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{ت} = \sqrt{\frac{\text{س} \times (\text{س} - \text{ٹ})}{\text{ڑ} \times \text{ڈ}}}$ جہاں $\text{س} = \tfrac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{ٹ} + \text{ڑ} + \text{ڈ})$

کیونکہ $\text{١} + \text{کوس ت} = \text{١} + \frac{\text{ڑ}^{\text{٢}} + \text{ڈ}^{\text{٢}} - \text{ٹ}^{\text{٢}}}{\text{٢ڑ} \times \text{ڈ}} = \frac{\text{ڑ}^{\text{٢}} + \text{٢ڑ} \times \text{ڈ} + \text{ڈ}^{\text{٢}} - \text{ٹ}^{\text{٢}}}{\text{٢ڑ} \times \text{ڈ}}$

$$= \frac{(\text{ڑ} + \text{ڈ})^{\text{٢}} - \text{ٹ}^{\text{٢}}}{\text{٢ڑ} \times \text{ڈ}} = \frac{(\text{ڑ} + \text{ڈ} + \text{ٹ}) \times (\text{ڑ} + \text{ڈ} - \text{ٹ})}{\text{٢ڑ} \times \text{ڈ}}$$

اب $\text{١} + \text{کوس ت} = \text{٢}\,\text{کوس}^{\text{٢}}\,\tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{ت}$ …… (دفعہ ٣٩ (٢))

اور $\text{س} - \text{ٹ} = \tfrac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{ٹ} + \text{ڑ} + \text{ڈ}) - \text{ت}$

$$= \tfrac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{ڑ} + \text{ڈ} - \text{ٹ})$$

$$\therefore \text{٢}\,\text{کوس}^{\text{٢}}\,\tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{ت} = \frac{(\text{ڑ} + \text{ڈ} + \text{ٹ}) \times (\text{ڑ} + \text{ڈ} - \text{ٹ})}{\text{٢ڑ} \times \text{ڈ}}$$

$$= \frac{\text{٢س} \times \text{٢}(\text{س} - \text{ٹ})}{\text{٢ڑ} \times \text{ڈ}}$$

$$\therefore \text{کوس}\,\tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{ت} = \sqrt{\frac{\text{س} \times (\text{س} - \text{ٹ})}{\text{ڑ} \times \text{ڈ}}}$$

٧٥ — ثابت کرو کہ $\text{سِن}\,\tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{ت} = \sqrt{\frac{(\text{س} - \text{ڑ}) \times (\text{س} - \text{ڈ})}{\text{ڑ} \times \text{ڈ}}}$

بموجب دفعہ ( ) کے ظاہر ہے کہ —

$$2\,\text{سن}^2\tfrac{1}{2}\text{ت} = 1 - \text{کوس ت} = 1 - \frac{\text{ڑ}^2+\text{ڈ}^2-\text{ٹ}^2}{2\text{ڑ}\times\text{ڈ}} = \frac{\text{ٹ}^2-(\text{ڑ}-\text{ڈ})^2}{2\text{ڑ}\times\text{ڈ}}$$

$$= \frac{(\text{ٹ}+\text{ڈ}-\text{ڑ})\times(\text{ٹ}+\text{ڑ}-\text{ڈ})}{2\text{ڑ}\times\text{ڈ}}$$

اب $\text{س}-\text{ڑ} = \tfrac{1}{2}(\text{ٹ}+\text{ڑ}+\text{ڈ})-\text{ڑ} = \tfrac{1}{2}(\text{ٹ}+\text{ڈ}-\text{ڑ})$

اسیطرح $\text{س}-\text{ڈ} = \tfrac{1}{2}(\text{ٹ}+\text{ڑ}-\text{ڈ})$

$$\therefore 2\,\text{سن}^2\tfrac{1}{2}\text{ت} = \frac{2(\text{س}-\text{ڑ})\times 2(\text{س}-\text{ڈ})}{2\text{ڑ}\times\text{ڈ}}$$

$$\therefore \text{سن}\tfrac{1}{2}\text{ت} = \sqrt{\frac{(\text{س}-\text{ڑ})\times(\text{س}-\text{ڈ})}{\text{ڑ}\times\text{ڈ}}}$$

یہان اور دفعہ گذشتہ مین علامت نشان جذر کی ضرور مثبت ہوگی کیونکہ ت ایک زاویہ مثلث کا ہے اور ۱۸۰° سے کم ہے اسلیے کوس ½ت اور سن ½ت خواہ نخواہ مقدار مثبت ہین ۔

۱۴ ـ $\text{سن}^2\text{ت} = 1-\text{کوس}^2\text{ت} = (1+\text{کوس ت})\times(1-\text{کوس ت})$

$$= \left\{1+\frac{\text{ڑ}^2+\text{ڈ}^2-\text{ٹ}^2}{2\text{ڑ}\times\text{ڈ}}\right\}\times\left\{1-\frac{\text{ڑ}^2+\text{ڈ}^2-\text{ٹ}^2}{2\text{ڑ}\times\text{ڈ}}\right\}$$

$$= \frac{1}{4\text{ڑ}^2\times\text{ڈ}^2}\times(\text{ڑ}+\text{ڈ}-\text{ٹ})\times(\text{ڑ}+\text{ڈ}+\text{ٹ})\times(\text{ٹ}+\text{ڑ}-\text{ڈ})\times(\text{ٹ}+\text{ڈ}-\text{ڑ})$$

$$= \frac{1}{4\text{ڑ}^2\times\text{ڈ}^2}\times 2\text{س}\times 2(\text{س}-\text{ٹ})\times 2(\text{س}-\text{ڑ})\times 2(\text{س}-\text{ڈ})$$

$$= \frac{4}{\text{ڑ}^2\times\text{ڈ}^2}\times\text{س}(\text{س}-\text{ٹ})\times(\text{س}-\text{ڑ})\times(\text{س}-\text{ڈ})$$

$$\therefore \text{سن ت} = \frac{2}{\text{ڑ}\times\text{ڈ}}\times\sqrt{\text{س}(\text{س}-\text{ٹ})(\text{س}-\text{ڑ})\times(\text{س}-\text{ڈ})}$$

اسیطرح ٹان ½ ت = $\dfrac{\text{سین } \frac{1}{2} \text{ ت}}{\text{کوسین } \frac{1}{2} \text{ ت}} = \sqrt{\dfrac{(\text{س} - \text{ڑ}) \times (\text{س} - \text{ڈ})}{\text{س} (\text{س} - \text{ٹ})}}$

۷۷ — مفصلہ ذیل کی مساوات کی دوسرے جزو مین جو دو علامتین یعنے مثبت اور منفی کی دی ہوی اوسکی تشریح بیان کرو—

$$\text{کوسین } \tfrac{1}{2} \text{ ت} = \pm \sqrt{\dfrac{\text{س} (\text{س} - \text{ٹ})}{\text{ڑ} \times \text{ڈ}}}$$

چونکہ کوس (۲ن × ۱۸۰° ± ت) = کوسین ت ...... (دفعہ ۲۵)

$$\therefore \text{کوسین } (۲\text{ن} \times ۱۸۰^\circ \pm \text{ت}) = \dfrac{\text{ڑ}^۲ + \text{ڈ}^۲ - \text{ٹ}^۲}{۲ \text{ڑ} \times \text{ڈ}}$$

اس سے جیساکہ دفعہ ۴۷ مین ثابت ہوا ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\text{کوسین } (\text{ن} \times ۱۸۰^\circ \pm \tfrac{1}{2} \text{ ت}) = \pm \sqrt{\dfrac{\text{س} (\text{س} - \text{ٹ})}{\text{ڑ} \times \text{ڈ}}}$$

اب پہلی جزو اس مساوات سے دو قسم زاوجون کی نکلنا چاہیے جنکی کوساین ایک ہی مقدار کی ہون مگر مختلف العلامت ہون—

اول فرض کرو کہ ن عدد جفت ہو اور مساوی ہے ۲م کی

اب کوسین (ن × ۱۸۰° ± ½ ت) = کوس (۲م × ۱۸۰° ± ½ ت) = کوس (م × ۳۶۰° ± ½ ت)

اس مساوات مین م کی اعداد ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ وغیرہ علی التواتر مقرر کرنی سے یہ زاویے نکلتے ہین یعنے ± ½ ت ، ۳۶۰° ± ½ ت ، ۲ × ۳۶۰° ± ½ ت ، ۳ × ۳۶۰° ± ½ ت ...... وغیرہ انکی کوساین اوسی مقدار کی ہین جیسے کہ کوساین ± ½ ت یا + ½ ت کے —

دویم فرض کرو کہ ن عدد طاق ہے اور برابر ہے ۲م + ۱ کے

تو کوس {ن × ۱۸۰° ± ½ت} = کوس {(۲م × ۱۸۰° + ۱۸۰ ± ½ت)}

اس مساوات مین م کی اعداد ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ ...... وغیرہ علی التواتر مقرر کرنے سے یہ زاویٔے نکلتے ہین یعنے ۱۸۰° ± ½ت ، ۳۶۰° + (۱۸۰° ± ½ت) ، ۲ × ۳۶۰° + (۱۸۰° ± ½ت) ...... وغیرہ اِن سب زاویون کی کوساین اوسی مقدار کی ہین جبہ الکوساین ۱۸۰° ± ½ت کی اور جو

= کوس (۱۸۰° ± ½ت) = − کوس ½ت

اسلیئے اول جزو اس مساوات سے دو قسم زاویون کی جنکے کوساین ایک مقدار کے ہین مگر مختلف العلامت ہین نکلے۔

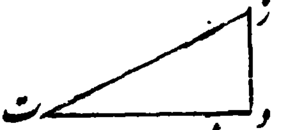
اور اسیطرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ سن ½ت ، ٹان ½ت ، سن ت کی جوابمین جو دو علامتین یعنے مثبت اور منفی کی آئی ہین اوسے دو قسم کے زاویے بھی نکل سکتے ہین۔

۱ مثلث قایمہ الزاویہ کے حل کرنیکے بیانمین

۷۸ — مثلث قایمہ الزاویہ کا زاویہ قایمہ اور ایک ضلع اور ایک اور جزو دیا گیا ہے ان جزون معلومہ کے ذریعہ سے باقی ماندہ جزو مثلث مذکور کے دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ت ر د ایک مثلث قایمہ الزاویہ ہو اور د زاویہ قایمہ ہے۔

اول فرض کرو کہ ڈ اور ٹ علاوہ زاویہ قایمہ کے باقی دو جز معلوم ہین



تو کوس ت = $\frac{\text{ز}}{\text{ڈ}}$ ، اور سن ت = $\frac{\text{ٹ}}{\text{ڈ}}$

لب ز = لب ڈ + ل کوس ت − ۱۰   اس سے ز نکلی گا

∴ لب ٹ = لب ڈ + ل سن ت − ۱۰ ..... اس سے ٹ نکلی گا

اور ز = ۹۰° − ت   اس سے زاویہ ز نکلی گا

اسیطرح سے اگر زاویہ ز معلوم ہو تو زاویہ ت نکل سکتا ہے۔

دوم فرض کرو کہ ت اور ز معلوم ہین علاوہ زاویہ قایمہ کے

تو سک ت = $\frac{\text{ڈ}}{\text{ز}}$ اور ٹان ت = $\frac{\text{ٹ}}{\text{ز}}$

∴ لب ڈ = لب ز + ل سک ت − ۱۰   اس سے ڈ نکلیگا
لب ٹ = لب ز + ل ٹان ت − ۱۰   اس سے ٹ نکلیگا

اور ز = ۹۰° − ت   اس سے زاویہ ز نکلیگا۔

سوم فرض کرو کہ ت اور ٹ علاوہ قایمہ کے معلوم ہین

تو ٹان ت = $\frac{\text{ٹ}}{\text{ز}}$ ∴ ز = $\frac{\text{ٹ}}{\text{ٹان ت}}$ ، اور لب ز = لب ٹ − ل ٹان ت + ۱۰

اور سن ت = $\frac{\text{ٹ}}{\text{ڈ}}$ ∴ ڈ = $\frac{\text{ٹ}}{\text{سن ت}}$ = ٹ × کوسک ت

اور لب ڈ = لب ٹ − ل سن ت + ۱۰ اور ز = ۹۰° − ت

چہارم فرض کرو کہ ٹ اور ڑ علاوہ قایمہ کے معلوم ہین

تو تان ت = $\frac{\text{ٹ}}{\text{ڑ}}$ ∴ ل تان ت = لب ٹ − لب ڑ + ۱۰

اور ز = ۹۰° − ت اور $\frac{\text{ڈ}}{\text{ڑ}}$ = سک ت

∴ لب ڈ = لب ڑ + ل سک ت − ۱۰

مساوات ڈ = $\sqrt{(\text{ٹ}^2 + \text{ڑ}^2)}$ سے ڈ معلوم ہوگا مگر عمل نکالنے ڈ کا بہت بھاری ہے خصوصاً اگر ٹ اور ڑ بڑی اعداد کیواسطے آئی ہون۔

پنجم فرض کرو کہ ڈ اور ٹ علاوہ قایمہ کے معلوم ہین

تو سن ٹ = $\frac{\text{ٹ}}{\text{ڈ}}$ اور ∴ ل سن ت = لب ٹ − لب ڈ + ۱۰

اور $\frac{\text{ڑ}}{\text{ڈ}}$ = کوس ت ∴ لب ڑ = لب ڈ + ل کوس ت − ۱۰

یا $\text{ڑ}^2 = \text{ڈ}^2 - \text{ٹ}^2 = (\text{ڈ} + \text{ٹ})(\text{ڈ} - \text{ٹ})$

∴ لب ڑ = $\frac{1}{2}$ {لب (ڈ + ٹ) + لب (ڈ − ٹ)}

اس سے ڑ بلا نکالنے ت کے معلوم ہوگا۔

۷۹ — مختلف حالتو مین مختلف طریقے واسطے دریافت کرنے جزو غیر معلومہ کے استعمال کرنا چاہیے مضمون مندرجہ شرح (۳ کے ۱۱ دفعہ کا) صحت کے ساتھہ یاد رکہنا ضرور ہے اور ہر حالتمین ایسا قاعدہ منتخب کرنا چاہیے جس سے نتیجہ نہایت صحیح نکلے۔

مثلاً اگر حالت اخیر مین یعنی بحسبم مین ڑ بہت چہوٹا ہو بمقابلہ ٹ اور ڈ کے تو زاویہ ت عنقریب زاویہ قایمہ کے ہوگا اور زاویہ ت مین تہوڑی زیادتی ہونے کی سبب سے سن ت مین جو زیادتی ہوگی [یعنے کوس ت × سن ٹ × {۱ − ٹان ت × ٹان $\frac{۱}{۲}$ ت}] (۵۹) وہ نہایت کم ہی اور جس قدر کہ زاویہ بڑہ گیا اوسقدر اوسکے سن مین زیادتی نہین ہوئی اسلیے اس حالت مین سن ت کا مقدار بذریعہ نقشون لوگارثم کے نہایت صحیح نہین نکل سکتا بہتر طریقہ واسطے دریافت کرنے زاویہ ت کے ایسی حالت مین یہ ہوگا کہ اول لمبائی ڑ کے معلوم کرلیجاوے اور بعدازان اوسکے کوساین سے زاویہ ت معلوم کرلیا جاوے مثلاً۔

$$\text{کوس ت} = \frac{\text{ڑ}}{\text{ڈ}} \quad \therefore \text{ل کوس ت} = \text{ل}_{۱}\text{ڑ} - \text{ل}_{۱}\text{ڈ} + ۱۰$$

$$= \text{ل}_{۱}{}^{\frac{۱}{۲}}(\text{ڈ}^{۲} - \text{ٹ}^{۲}) - \text{ل}_{۱}\text{ڈ} + ۱۰$$

$$= \frac{۱}{۲}\{\text{ل}_{۱}(\text{ڈ} + \text{ٹ}) + \text{ل}_{۱}(\text{ڈ} - \text{ٹ})\} + ۱۰ - \text{ل}_{۱}\text{ڈ}$$

۸۰۔ تمثیل

ڈ = ۳۶۵٫۱ ، ٹ = ۳۴۸٫۳ اس سے زاویہ ت نکالو

(لوگارثم جو اس تمثیل اور اور تمثیلون مین مستعمل ہوی ہین تین صفحون مین جنمین لوگارثم کا ذکر ہے بعد شرح (۱) و (۲) ملین گے۔

یہان ڈ + ٹ = ۷۱۳٫۴ اور ڈ − ٹ = ۱۶٫۸

مساوات مندرجہ بالا کے حل کرنے سے ل ۷۱۳٫۴ = ۲٫۸۵۳۳۳۳۱

ل ۷۱۳٫۴ = ۲٫۸۵۳۳۳۳۱

ل ۱۶٫۸ = ۱٫۲۲۵۳۰۹۳

۲) ۴٫۰۷۸۶۴۲۴

۲٫۰۳۹۳۲۱۲

۱۰

۱۲٫۰۳۹۳۲۱۲

ل ۳۶۵٫۱ = ۲٫۵۶۲۴۱۱۸

۹٫۴۷۶۹۰۹۴

اور ل کوس ۷۲° ۳۳' ۹٫۴۷۶۹۳۸۰ یہ شرح ۳ (۳) ۹ تمثیل ۳ مین ملیگا

حاصل تفریق = ۲۸۶

اور حاصل تفریق ۱' کا اس حالت مین = ۶۷٫۰۱۶

اور ۲۸۶ / ۶۷٫۰۱۶ = ۴٫۲۶۷ = ۴٫۲۷״ تقریباً

∴ ت = ۷۲° ۳۳' ۴٫۲۷״ یعنی ۷۲ ڈگری ۳۳ منٹ اور قریب ۴٫۲۷ سکنڈ کے

۲— اون مثلثون کے حل کرنیکی بیان مین جنکا زاویہ قائمہ نہین ہے

۱۸— فرض کرو کہ کسی مثلث کے دو زاوئی اور اون زاویون کے درمیان کا ضلع معلوم ہین یعنی (زاوے ت اور د اور ضلع ڑ)

چونکہ ت + ز + د = ۱۸۰° ∴ ز = ۱۸۰° − (ت + د) اس سے زاویہ ز نکلتا ہے

$$\text{اور ٹ} = \text{ڑ} + \frac{\text{سن ت}}{\text{سن ز}}\text{،}$$

∴ لبا ٹ = لبا ڑ + ل سن ت − ل سن ز اس سے ٹ نکلتا ہے۔

$$\text{اور ڈ} = \text{ڑ} + \frac{\text{سن د}}{\text{سن ز}}$$

∴ لبا ڈ = لبا ڑ + ل سن د − ل سن ز اس سے ڈ نکلتا ہے۔

اگر ت + د چھوٹا ہی ۹۰° دگری سے تو مقدار ز کا دریافت کرنا واسطے معلوم کرنے ٹ اور ڈ کے مطلوب نہین ہے۔

کیونکہ سن ز = سن {۱۸۰° − (ت + د)} = سن (ت + د)

∴ لبا ٹ = لبا ڑ + ل سن ت − ل سن (ت + د)

اور لبا ڈ = لبا ڑ + ل سن د − ل سن (ت + د)

۸۲— فرض کرو کہ دو زاوی اور ایک ضلع مقابل کسی ایک اِن زاویوں کا معلوم ہین یعنی (زاوی ت م د اور ضلع ٹ)

$$\text{تو ز} = ۱۸۰° - (\text{ت} + \text{د}) \quad \text{اور ڑ} = \text{ٹ} \times \frac{\text{سن ز}}{\text{سن ت}}$$

∴ لبا ڑ = لبا ٹ + ل سن ز − ل سن ت

= لبا ٹ + ل سن (ت + د) − ل سن ت

اور $\text{ڈ} = \text{ٹ} \times \frac{\text{سن د}}{\text{سن ت}}$ ∴ $\text{ل}_{۱}\text{ڈ} = \text{ل}_{۱}\text{ٹ} + \text{ل سن د} - \text{ل سن ت}$

۸۳– فرض کرو کہ دو اضلاع اور زاویہ درمیانی اِنْ اضلاع کا معلوم ہیں یعنی (ڈ، ت، ڑ)

اول جزون معلومہ سے زاویٔ ز و د معلوم کرو

$$\text{ز} + \text{د} = ۱۸۰^\circ - \text{ت} \quad \therefore \tfrac{۱}{۲}(\text{ز} + \text{د}) = \tfrac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - \text{ت})$$

اور $\frac{\text{ڑ}}{\text{ڈ}} = \frac{\text{سن ز}}{\text{سن د}}$ ∴ $\frac{\frac{\text{ڑ}}{\text{ڈ}} - ۱}{\frac{\text{ڑ}}{\text{ڈ}} + ۱} = \frac{\frac{\text{سن ز}}{\text{سن د}} - ۱}{\frac{\text{سن ز}}{\text{سن د}} + ۱}$

$$\therefore \frac{\text{ڑ} - \text{ڈ}}{\text{ڑ} + \text{ڈ}} = \frac{\text{سن ز} - \text{سن د}}{\text{سن ز} + \text{سن د}} = \frac{\text{ٹان } \tfrac{۱}{۲}(\text{ز} - \text{د})}{\text{ٹان } \tfrac{۱}{۲}(\text{ز} + \text{د})} \ldots\ldots (\text{دفعہ } ۵۲)$$

اور $\text{ٹان } \tfrac{۱}{۲}(\text{ز} + \text{د}) = \text{ٹان } \tfrac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - \text{ت}) = \text{کوٹ } \tfrac{۱}{۲}\text{ت}$

$$\therefore \text{ٹان } \tfrac{۱}{۲}(\text{ز} - \text{د}) = \frac{\text{ڑ} - \text{ڈ}}{\text{ڑ} + \text{ڈ}} \times \text{کوٹ } \tfrac{۱}{۲}\text{ت}$$

$$\therefore \text{ل ٹان } \tfrac{۱}{۲}(\text{ز} - \text{د}) = \text{ل}_{۱}(\text{ڑ} - \text{ڈ}) - \text{ل}_{۱}(\text{ڑ} + \text{ڈ}) + \text{ل کوٹ } \tfrac{۱}{۲}\text{ت} \ldots\ldots (۲)$$

$\tfrac{۱}{۲}(\text{ز} - \text{د})$ اوپر کی مثالون سے معلوم ہوا اور $\tfrac{۱}{۲}(\text{ز} + \text{د})$ معلوم ہے –

$$\left.\begin{aligned} \text{ز} &= \tfrac{۱}{۲}(\text{ز} + \text{د}) + \tfrac{۱}{۲}(\text{ز} - \text{د}) \\ \text{د} &= \tfrac{۱}{۲}(\text{ز} + \text{د}) - \tfrac{۱}{۲}(\quad - \text{د}) \end{aligned}\right\}$$ اسلیے ز اور د معلوم ہوگی

اور $\text{ٹ} = \text{ڈ} \times \frac{\text{سن ت}}{\text{سن د}}$ اس سے ٹ نکلتا ہے

– اگر (ڈ، ت، ڑ) معلوم ہون تو ٹ بلا معلوم کرنے ز اور د کے معلوم

ہوم ہوسکتا ہے ـــ

کیونکہ $\text{ٹ}^2 = \text{ڑ}^2 + \text{ڈ}^2 - 2\,\text{ڑ}\times\text{ڈ}\times\text{کوسن ت}$

$= \text{ڑ}^2 + \text{ڈ}^2 - 2\,\text{ڑ}\times\text{ڈ}\left(1 - 2\,\text{سن}^2\,\tfrac{1}{2}\,\text{ت}\right)$ .... دفعہ ۳۹ (۳)

$= (\text{ڑ}-\text{ڈ})^2 + 4\,\text{ڑ}\times\text{ڈ}\times\text{سن}^2\,\tfrac{1}{2}\,\text{ت}$

$= (\text{ڑ}-\text{ڈ})^2 \times\left\{1 + \frac{4\,\text{ڑ}\times\text{ڈ}}{(\text{ڑ}-\text{ڈ})^2}\times\text{سن}^2\,\tfrac{1}{2}\,\text{ت}\right\}$

$= (\text{ڑ}-\text{ڈ})^2 \times\left\{1 + \left(\frac{2\sqrt{\text{ڑ}\times\text{ڈ}}}{\text{ڑ}-\text{ڈ}}\times\text{سن}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ت}\right)^2\right\}$

اب $\frac{2\sqrt{\text{ڑ}\times\text{ڈ}}}{\text{ڑ}-\text{ڈ}}\times\text{سن}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ت}$ کسی مقدار اور کسی علامت کا ہوسکتا ہے اور اسلیے کسی نہ کسی زاویہ کا ٹانجنٹ اوس مقدار کے برابر ہے فرض کہ وہ زاویہ یہہ ھ ہے

تو $\text{ٹان ھ} = \frac{2\sqrt{\text{ڑ}\times\text{ڈ}}}{\text{ڑ}-\text{ڈ}}\times\text{سن}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ت}$ ....(۱)

اور $\text{ٹ}^2 = (\text{ڑ}-\text{ڈ})^2\times(1+\text{ٹان}^2\,\text{ھ}) = (\text{ڑ}-\text{ڈ})^2\times\text{سک}^2\,\text{ھ}$

$\therefore\ \text{ٹ} = (\text{ڑ}-\text{ڈ})\times\text{سک ھ}$ ....(۲)

(۱) سے $\text{ل ٹان ھ} = \text{لا}\,2 + \tfrac{1}{2}\,\text{لا ڑ} + \tfrac{1}{2}\,\text{لا ڈ} - \text{لا}\,(\text{ڑ}-\text{ڈ}) + \text{ل سن}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ت}$

$= \tfrac{1}{2}(\text{لا ڑ} + \text{لا ڈ}) + \text{لا}\,2 + \text{ل سن}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ت} - \text{لا}\,(\text{ڑ}-\text{ڈ})$

اس مساوات سے ھ نکلتا ہے

(۲) سے $\text{لا ٹ} = \text{لا}\,(\text{ڑ}-\text{ڈ}) + \text{ل سک ھ} - 10$ اس سے ٹ نکلتا ہے

۵۸ — اگر ڈ سے ڑ تھوڑی ہی بڑا ہو تو ڑ — ڈ بہت چھوٹا ہے اور $\frac{۲\sqrt{ڑ \times ڈ}}{ڑ - ڈ}$ کس ا $\frac{۱}{۲}$ س جو ٹان ۸ کا مقدار ہے بہت بڑا ہی سوا ہے اوس حالت مین جبکہ $\frac{۱}{۲}$ ت اور اسلیے سن $\frac{۱}{۲}$ ت بہت چھوٹا ہے چونکہ ٹانجنٹ اون زاویون کا جو قریب قایمہ کے ہین بہت بڑا ہے اسلئے ۸ اس حالت مین قریب ایک قایمہ کے ہے۔

اب اگر کسی زاویہ کے ٹانجنٹ سے وہ زاویہ نکالنا ہو جسمین پوری ڈگری اور منٹ نہ آتے ہون تو باقی سکنڈ کے نکالنے کا یہ طریقہ ہے کہ فہرست لوگارتم کی زیادتی پڑتی ہے بموجب زاویے کے زیادتی کی مگر جبکہ زاویہ برابر ہے قریب (۲ ن + ۱) × ۹۰° کے تو ٹانجنٹ کی نسبت یہ قاعدہ صحیح نہین (بموجب دفعہ ۶۲ اور شرح ۳ کے دفعہ ۱۱) اور اسلیے ۸ ایسا صحیح نہین نکل سکتا جس سے ٹ صحیح نکلے مساوات ٹ = (ڑ − ڈ) × سک ۸ کے ذریعہ سے اور اسلیے جبکہ ڈ برابر بھی قریب ڑ کے اور ت بہت چھوٹا زاویہ نہین ہے تب طریقہ مفصلہ ذیل سے ٹ زیادہ صحیح نکلیگا بہ نسبت اوپر لکھے ہوئے طریقہ سے۔

$$\text{ٹ}^{۲} = \text{ڑ}^{۲} + \text{ڈ}^{۲} - ۲\,\text{ڑ} \times \text{ڈ}\ \text{کوس ت} = \text{ڑ}^{۲} + \text{ڈ}^{۲} - ۲\,\text{ڑ} \times \text{ڈ}\left[۲\ \text{کوس}^{۲}\ \tfrac{۱}{۲}\text{ت} - ۱\right] \ldots\ldots (۲۹)$$

$$= (\text{ڑ}^{۲} + \text{ڈ}^{۲} - ۲\,\text{ڑ} \times \text{ڈ}) - ۴\,\text{ڑ} \times \text{ڈ} \times \text{کوس}^{۲}\ \tfrac{۱}{۲}\text{ت}$$

$$= (\text{ڑ} + \text{ڈ})^{۲} \times \left\{۱ - \left(\frac{۲\sqrt{\text{ڑ} \times \text{ڈ}}}{\text{ڑ} + \text{ڈ}} \times \text{کوس}\ \tfrac{۱}{۲}\text{ت}\right)^{۲}\right\}$$

$(\sqrt{\text{ڑ}} - \sqrt{\text{ڈ}})^{۲}$ یا $\text{ڑ} - ۲\sqrt{\text{ڑ} \times \text{ڈ}} + \text{ڈ}$ بسبب ہونے مربع کے خواہ مخواہ مقدار مثبت ہین

اسلیے اوس مقدار کا حصہ مثبت بڑا ہے بہ نسبت حصہ منفی کے یعنی $\text{ڑ} + \text{ڈ} > ۲\sqrt{\text{ڑ} \times \text{ڈ}}$

$\therefore$ $\frac{۲\sqrt{\text{ڑ} \times \text{ڈ}}}{\text{ڑ} + \text{ڈ}}$ کسر ہے اور $\frac{۲\sqrt{\text{ڑ} \times \text{ڈ}}}{\text{ڑ} + \text{ڈ}} \times$ کوس $\frac{۱}{۲}$ ت بھی کسر ہے

اسلیے فرض کرو کہ زاویہ ع وہ زاویہ ہے جسکا ساین $= \frac{۲\sqrt{\text{ڑ} \times \text{ڈ}}}{\text{ڑ} + \text{ڈ}} \times$ کوس $\frac{۱}{۲}$ ت

یعنے ساین ع $= \frac{۲\sqrt{\text{ڑ} \times \text{ڈ}}}{\text{ڑ} \times \text{ڈ}} \times$ کوس $\frac{۱}{۲}$ ت ....(۱)

تو $\text{ٹ}^۲ = (\text{ڑ} + \text{ڈ})^۲ \times (۱ - \text{سن}^۲\ \text{ع})$

$\therefore$ $\text{ٹ} = (\text{ڑ} \times \text{ڈ}) \times$ کوس ع ....(۲)

(۱) سے ل سن ع $=$ ل۲ $+ \frac{۱}{۲}$ ل ڑ $+ \frac{۱}{۲}$ ل ڈ $-$ ل(ڑ + ڈ) $+$ ل کوس $\frac{۱}{۲}$ ت

$= \frac{۱}{۲}$(ل ڑ + ل ڈ) $+$ ل۲ $+$ ل کوس $\frac{۱}{۲}$ ت $-$ ل(ڑ + ڈ)

(۲) سے ل ٹ $=$ ل(ڑ + ڈ) $+$ ل کوس ع $- ۱۰$

ان دونوں سے ع اور ٹ نکلتی ہین

۸۶ - فرض کرو کہ دو اضلاع اور ایک زاویہ مقابل کسی ایک ان زاویونکا معلوم ہین (ٹ، ڑ، ت) دفعہ ۲۷ مین یہ ثابت ہوگیا ہے کہ جزون مذکورہ بالا (یعنی ٹ، ڑ، ت) معلومہ سے حل کرنا مشتبہ ہوگا جبانکہ ٹ بڑا ہو ڑ سے لیکن اگر ٹ بڑا ہو ڑ سے تو

سن ر $= \frac{\text{ڑ}}{\text{ٹ}} \times$ سن ت اسمین زاویہ ر ۹۰° سے چھوٹا ہے

اور و $= ۱۸۰^\circ$ (ت + ر) اور ڈ $=$ ٹ $\times \frac{\text{سن و}}{\text{سن ت}}$

۷۸- فرض کرو کہ تینون اضلاع مثلث کے معلوم ہین یعنے (ٹ، ڑ، ڈ)

$$\text{اب سن ت} = \frac{۲}{\text{ڑ} \times \text{ڈ}} \times \sqrt{\text{س}(\text{س} - \text{ٹ}) \times (\text{س} - \text{ڑ}) \times (\text{س} - \text{ڈ})}$$

$$\text{سن } \tfrac{1}{2}\text{ت} = \sqrt{\frac{(\text{س} - \text{ڑ}) \times (\text{س} - \text{ڈ})}{\text{ڑ} \times \text{ڈ}}}$$

$$\text{کوسن } \tfrac{1}{2}\text{ت} = \sqrt{\frac{\text{س}(\text{س} - \text{ٹ})}{\text{ڑ} \times \text{ڈ}}}$$

$$\text{ٹان } \tfrac{1}{2}\text{ت} = \sqrt{\frac{(\text{س} - \text{ڑ}) \times (\text{س} - \text{ڈ})}{\text{س}(\text{س} - \text{ٹ})}} \; *$$

*اگر زاویہ درمیانی سے قاعدہ پر یا قاعدہ کے کسی طرف کے بڑھائی ہوئی حصہ پر ایک عمود ڈالا جاوے تو اشکال ۱۲ و ۱۳ مقالہ دوم کے نتایج سے ظاہر ہو سکتا ہی کہ

قاعدہ

: حاصل جمع دو اضلاع

:: حاصل تفریق دو اضلاع

: حاصل تفریق یا حاصل جمع قاعدہ کے دو ٹکڑون کے

اس تناسب کے چوتھی جزو مین حاصل جمع اوسوقت ہوگا جب عمود قاعدہ کے بڑھائی ہوئے حصہ کو قطع کرتا ہے اور حاصل تفریق اوسوقت ہوگا جب عمود قاعدہ کو بلا بڑھانے کے جبکہ تین اضلاع ایک مثلث کے معلوم ہون تو مثلث مذکور کو دو مثلثون قایمہ الزاویہ مین تقسیم کرنے سے، ت کا دریافت کرنا زیادہ سہل ہوگا بہ نسبت اوس قاعدہ سے جو کہ کتاب مین دیا گیا ہے +

قطع کرتا ہے۔

ت ب = (ت ر ± ر ب) اس مساوات سے چوتھا جزو دریافت ہونے پر کوس ت جو برابر ہے $\frac{\text{ت ب}}{\text{ت و}}$ کے معلوم ہو سکتا ہے۔

۸۸ — یاد رکھنا چاہیے کہ اگر ت قریب ۹۰° کے ہو تو اول قاعدہ دفعہ ۸۰ سے ت کا مقدار بہت صحیح معلوم نہوگا کیونکہ اس حالت مین سن ت مین جو تھوڑی زیادتی ہوگی وہ اسقدر نہین گھٹتی بڑھتی ہے جیسا زیادتی زاویہ ت کے اور بہت کم بھی ہے (شرح ۲ دفعہ ۱۱) اس حالت مین کوئی قاعدہ تین قاعدون سے مستعمل ہو سکتا ہے دوسرا اور تیسرا قاعدہ اوس وقت استعمال کرنا چاہیے جب کوس ½ ت یا سن ½ ت بڑا ہو یعنے جبکہ ½ ت خواہ چھوٹا ہو یا بڑا ہو ۴۵° سے (۶۳) قاعدہ چوتھا ہر حالتمین مستعمل ہو سکتا ہے سوای اوس حالت کے جبکہ ½ ت برابر ہے قریب ۹۰° کے (۶۲)

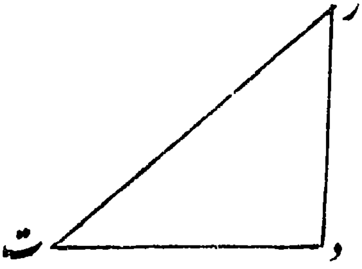
مثال ۱۔

۸۹ اگر کوئی شے ز د بطور عمود کسی سطح ہموار* پر قائم ہو تو اوس کی اونچائی بذریعہ ناپنے کسی خط ب و کی جو کہ اوسی سطح پر واقع ہو اور جسکو قاعدہ بھی کہتے ہین اور بذریعہ ناپنے زاویہ ر ب د کی دریافت ہو سکتی ہے

---

* سطح ہموار سے یہان وہ سطح مراد ہے جو افق کے متوازی ہو یعنے جو متوازی ہو اوس دائرہ کے جسکو ہم لوگ اپنے چاروطرف دیکھتے ہین اور جہان معلوم ہوتا ہے کہ آسمان زمین سے مل گیا ہے۔

ناپنے کسی خط ت د کے جو کہ اوسی سطح پر واقع ہے اور جس کو قاعدہ بہی کہتے ہین اور بذریعہ ناپنے زاویہ ر ت د کے دریافت ہوسکتی ہے۔

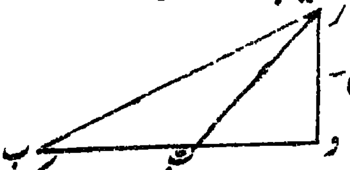


کیونکہ ر د = ت د × ٹان ر ت د

∴ لو ر د = لو ت د + ل ٹان ر ت د − ۱۰

مثال ۲

اگر شے مذکور کی پائین تک پہونچنا غیر ممکن ہو تو قاعدہ ب ت کو اسطرح سے ناپ لو کہ نقاط ب، ت، د ایک ہی خط مستقیم مین ہون اور زاویہ جات ر ب ت، ر ت د کو ناپ لو تو اس سے اونچائی شے مذکور کی معلوم ہو جاویگی۔



یہان ہر دو زاویے اور ایک ضلع مثلث ر ت ب کے معلوم ہین پہلے ضلع ر ت کو دریافت کر لو اور تب ضلع ر د کی اونچائی مثلث ر ت د قایمہ الزاویہ سے کہ معلوم ہو سکتی ہے اسطرح سے

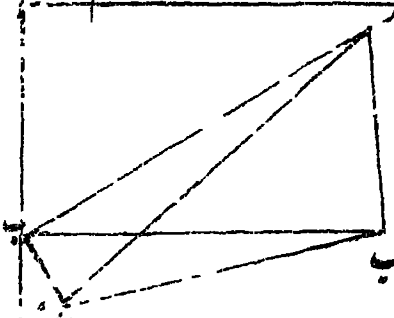
$$\frac{\text{ت ر}}{\text{ت ب}} = \frac{\text{سن ر ب ت}}{\text{سن ب ر ت}} = \frac{\text{سن ر ب ت}}{\text{سن (ر ت د − ر ب ت)}}$$

$$\text{اور ر د = ر ت × سن ر ت د = ت ب} \times \frac{\text{سن ر ب ت × سن ر ت د}}{\text{سن (ر ت د − ر ب ت)}}$$

∴ لو ر د = لو ت ب + ل سن ر ب ت + ل سن ر ت د − ل سن (ر ت د − ر ب ت) − ۱۰

مثال ۳

اگر ب خط ت د مین نہو تب بہی اونچائی ر د کے معلوم ہو سکتے ہے۔



فرض کرو کہ نقطہ ت کو زاویہ رتد و رت ب ناپی گئی ہین اور نقطہ ب پر کا زاویہ رب ت ناپا گیا ہی چونکہ △ رب ت مین زاویہ رب ت و رت ب اور ضلع ت ب معلوم ہین اگر رت ان جزون معلومہ سی دریافت کیا جا سکتا ہو تو ر د بذریعہ مثلث قایمہ الزاویہ رت د کے معلوم ہو سکتا ہے

اسیطرحسی رت / ت ب = سن ر ب ت / سن ب ر ت = سن ر ب ت / سن {۱۸۰ − (ر ب ت + رت ب)}

∴ رب = ت ب × سن ر ب ت / سن (ر ب ت + رت ب)

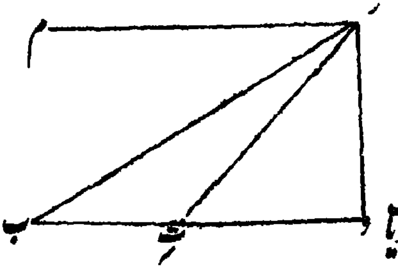
اور ر د = رت × سن رت د = ت ب × سن ر ب ت × سن رت د / سن (ر ب ت + رت ب)

ل ر د = ل ت ب + ل سن ر ب ت + ل سن رت د − ل سن (ر ب ت + رت ب) − ۱۰

ظاہر ہے کہ ب کا واقع ہونا باہر اوس سطح ہموار کے جسمین نقاط ت اور د واقع ہین ر د کی دریافت کرنے مین نقطہ ت سے ناپ لیا جاوے اور زاویہ جات رت د و رت ب و رب ت ناپ لیے جاوین تو اوس سطح ہموار سے جسمین نقاط ت اور د واقع ہین اونچائی نقطہ ر کی دریافت کرنےمین یہ معلومات کافی ہونگے۔

مثال ۴

ایک مکان ر د کے چھت پر سے جسکی اونچائی معلوم ہے ایک دریا ی ت ب کی



چوڑائی دریافت کرنا ہے۔

نقطہ ر سے ایک خط رم وب کا متواری کہینچو اور زاوے م رب اور م رت دریافت کرو تو زاویہ م رب = زاویہ رب و اور زاویہ م رت = رت و اور

$$\text{ب ت} = \text{ر ت} \times \frac{\text{سن ب ر ت}}{\text{سن ر ب ت}}$$

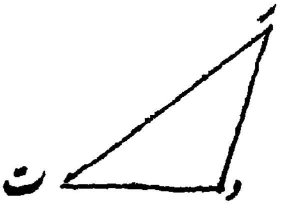
$$= \text{ر ت} \times \frac{\text{سن (ر ت و} - \text{ر ب ت)}}{\text{سن ر ب ت}}$$

$$= \frac{\text{ر} \times \text{و}}{\text{سن ر ت ب}} \times \frac{\text{سن (ر ت و} - \text{ر ب ت)}}{\text{سن ر ب ت}}$$

مثال ۵

جس قدر کہ غلطی اونچائی مین ہوئی ہو بسبب واقع ہونے تہوری غلطی زاویہ کی دیکہنے مین اوسکو دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ر و = و یعنی اونچائی



ت و = ث

زاویہ رت و = ٹ

فرض کرو کہ ک غلطی اونچائی کی ہے اور ط غلطی زاویہ کی ہے۔

$$\text{تو } \text{و} = \text{ٹ} \times \text{ٹان ت} \quad \text{اور} \quad \text{و} + \text{ک} = \text{ٹ} \times \text{ٹان} (\text{ت} + \text{ط})$$

$$\therefore \text{ک} = \text{ٹ} \times \left\{ \text{ٹان} (\text{ت} + \text{ط}) - \text{ٹان ت} \right\}$$

$$= \text{ٹ} \times \left\{ \frac{\text{سن} (\text{ت} + \text{ط})}{\text{کوس} (\text{ت} + \text{ط})} - \frac{\text{سن ت}}{\text{کوس ت}} \right\}$$

$$= \text{ٹ} \times \frac{\text{سن} (\text{ت} + \text{ط}) \times \text{کوس ت} - \text{کوس} (\text{ت} + \text{ط}) \times \text{سن ت}}{\text{کوس} (\text{ت} + \text{ط}) \times \text{کوس ت}}$$

$$= \text{ٹ} \times \frac{\text{سن ط}}{\text{کوس}^{٢} \text{ت}} \quad \text{کیونکہ کوس ت} = \text{قریب کوس} (\text{ت} + \text{ط})$$

جبکہ ط بہت چھوٹا ہے (٦٠)

حاصل

اس سے معلوم ہو سکتا ہی کہ کس وقت وہ غلطی جو اونچائی مین ہوی بسبب واقع ہونے تھوڑی غلطی زاویہ کے دیکھنے مین نہایت کم ہو گی ۔

$$\text{کیونکہ } \text{ک} = \text{ٹ} \times \frac{\text{سن ط}}{\text{کوس}^{٢} \text{ت}} = \frac{\text{و}}{\text{ٹان ت}} \times \frac{\text{سن ط}}{\text{کوس}^{٢} \text{ت}} = \frac{\text{و} \times \text{سن ط}}{\text{سن ت} \times \text{کوس ت}}$$

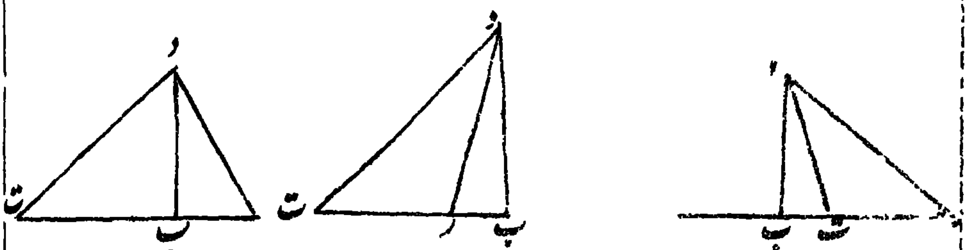
$$= \frac{٢ \text{و} \times \text{سن ط}}{٢ \text{سن ت} \times \text{کوس ت}} = \frac{٢ \text{و} \times \text{سن ط}}{\text{سن } ٢ \text{ت}}$$

یہان و یعنی اونچائی بلاتبدیل ہے اور ط معلوم ہی مقدار بالاجزا اونچائی کی غلطی ہے اوس وقت اقل ہوگی جب سن ٢ ت سب سے بڑا ہوگا یعنے جب ٢ ت = ٩٠° یا ت = ٤٥° اسلیے پیمائش کنندہ کو چاہیے کہ قاعدہ کے برابر اتنی دور تک چلے جب تک زاویہ ت

برابر وم کے ہووے اور تب بذریعہ ناپنے ت و کے ر و جو اوس وقت برابر ت و کے ہوویگا اوسکا نہایت صحت کے ساتھہ معلوم ہوسکتا ہے —

۴۹ بیان دریافت کرنے اراضی کسی مثلث کے جسکی اضلاع معلوم ہین —

فرض کرو کہ ت ر و ایک مثلث ہے نقطہ و سے و ب ایک عمود ت ر پر یا ت ر کے بڑہائے ہوئے حصہ پر گراو



تو اراضی مثلث ت ر و کے برابر ہے نصف اراضی اوس مستطیل کے جو اوسی قاعدہ پر اور انہین خطوط متوازی کے درمیان واقع ہے یعنی

= ½ ت ر × و ب = ½ ت ر × ت و × سن و ت ر

= ½ و ر × ۲ / (ر × و) × √{س (س - ت) × (س - ر) × (س - و)} ... (۶۱)

= √{س (س - ت) × (س - ر) × (س - و)}

۰ — مثلث کے اراضی = ½ ت² × (سن ر × سن و) / سن (ر + و)

ا = ½ ت ر × و ب = ½ ت ر × ر و × سن ر

$$= \frac{1}{2}\,\text{ر و} \times \frac{\text{سن و}}{\text{سن ت}} \times \text{ر و} \times \text{سن ر}$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{ط}^{2} \times \frac{\text{سن ر} \times \text{سن و}}{\text{سن (ر + و)}}$$

اس سبب سے کہ سن ت = سن {۱۸۰° - (ر + و)} = سن (ر + و) ہے

۹۲ — اون دائرون کے نصف القطر کو دریافت کرو جو کسی شکل کثیر الاضلاع مساوی الخطین کے اندر اور گرد کھینچے گئے ہیں شکل مذکور ایسے شکل ہے جسکی اضلاع اور زاوی آپس میں برابر ہیں

فرض کرو کہ ت ر ایک ضلع ہے اوس شکل کثیر الاضلاع اور مساوی الخطین کا کہ جسکے اضلاع کا شمار ن ہے۔

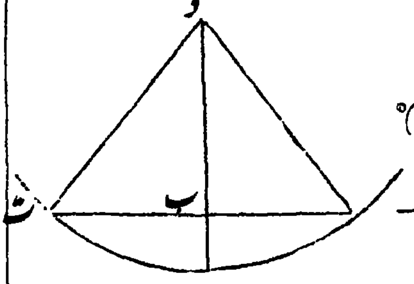
چونکہ شکل مذکور ایسی شکل ہے جسکے اضلاع اور زاوی آپس میں برابر ہیں اسلئے ایک دائرہ اوسکے اندر کھینچا جاسکتا ہے اور ایک دائرہ اوسکے گرد اور ہر ایک کے لئے مرکز عام پرکار زاویہ ایک ہی ہے —

نقطہ و سے و ب ایک عمود ت ر پر گراؤ تو ت ب = ب ر اور و ب نصف القطر ہے اوس دائرہ کا جو شکل مذکور کے اندر کھینچا گیا ہے فرض کرو کہ ژ = و ب اور ز = و ت

چونکہ حاصل جمع و پر کے سب زاویوں کا = ن × ت و ر = ۳۶۰° ڈگری

∴ زاویہ ت و ر = $\frac{۳۶۰°}{\text{ن}}$ ، ∴ زاویہ ت و ب = $\frac{1}{2}$ ت و ر = $\frac{۱۸۰°}{\text{ن}}$

اور $\frac{\text{ت ب}}{\text{و ب}}$ = ٹان ت و ب



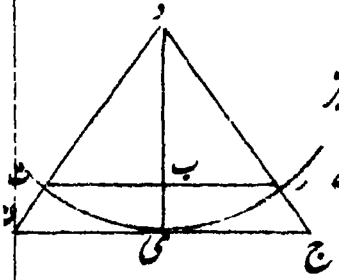
∴ ثر = د ب = ت ب × کوٹ ت د ب

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{ت ر} \times \text{کوٹ}\ \frac{۱۸۰°}{\text{ن}} \ldots\ldots (۱)$$

$$\text{اور ز} = \text{ت د ر} = \frac{\text{ت ب}}{\text{سن ت د ب}} = \frac{\tfrac{1}{2}\,\text{ت ر}}{\text{سن}\ \frac{۱۸۰°}{\text{ن}}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{ت ر} \times \text{کوسک}\ \frac{۱۸۰°}{\text{ن}} \ldots\ldots (۲)$$

۹۳ — جو کثیر الاضلاع مساوی الخطین کسی دائرہ کے اندر یا باہر کھینچے ہین اور نصف قطر معلوم ہے اوس کے اراضی دریافت کرو



فرض کرو کہ ت ی ر قوس ہے اوس دائرہ کا جسکا مرکز د ہے اور ت ر ایک ضلع ہی اوس کثیر الاضلاع مساوی الخطین کا جسکے اضلاع کا شمار ن ہی اور جو اوس دائرہ کے اندر کھینچی گئی ہے اور دی ب ت ر پر عمود واقع ہو کر ت ر کے تنصیف کرتا ہے اور ف ج خط مماس ہی جو دائرہ کو نقطہ ی سے چھوتا ہی اور ملتا ہی خط د ت سے نقطہ ف پر اور خط د ر سے نقطہ ج پر تو ف ج ایک ضلع ہے اوس شکل کثیر الاضلاع مساوی الخطین کا جو دائرہ مذکور کے باہر کھینچی گئی ہے اور یہہ بھی فرض کرو کہ د ت = ر

∴ ت ر = ۲ ت ب = ۲ ر × سن ت د ب

$$= ۲\,\text{ر} \times \text{سن}\ \frac{۳۶۰°}{۲\text{ن}} = ۲\,\text{ر} \times \text{سن}\ \frac{۱۸۰°}{\text{ن}}$$

$$\text{ف ج} = ۲\,\text{ف ی} = ۲\,\text{د ی} \times \text{ٹان ی د ف} = ۲\,\text{ر} \times \text{ٹان}\,\frac{۱۸۰^\circ}{\text{ن}}$$

ت = اراضی اوس شکل کثیر الاضلاع والزاویہ جو دائرہ کے اندر کھینچی گئی ہے

$$= \text{ن} \times \triangle\,\text{د ت ر}$$

$$= \text{ن} \times \frac{\text{د ت} \times \text{د ر} \times \text{سن ت د ر}}{۲} = \frac{\text{ن}}{۲} \times \text{ر}^۲ \times \text{سن}\,\frac{۳۶۰^\circ}{\text{ن}}$$

تَ = اراضی اوس شکل کثیر الاضلاع والزاویہ جو دائرہ کے باہر کھینچی ہے۔

$$= \text{ن} \times \triangle\,\text{د ف ج}$$

$$= \text{ن} \times \text{د ی} \times \text{ف ی} = \text{ن} \times \text{ر}^۲ \times \text{ٹان}\,\frac{۱۸۰^\circ}{\text{ن}}$$

حاصل۔ ان اراضیون کو بموجب مفصلہ ذیل ایک دوسرے سے تشبیہ دی سکتی ہین

$$\frac{\text{اراضی اوس شکل کثیر الاضلاع والزاویہ جو دائرہ کے اندر کھینچی گئی ہے۔}}{\text{اراضی اوس شکل کثیر الاضلاع والزاویہ جو دائرہ کے باہر کھینچی گئی ہے}} = \frac{\triangle\,\text{د ت ب}}{\triangle\,\text{د ف ی}} = \frac{\text{د ب}^۲}{\text{د ی}^۲}$$ اسلئے

کہ دو مثلث ایسمین متساوی ہین

$$= \left(\frac{\text{د ب}}{\text{د ت}}\right)^۲ = \text{کوس}^۲\,\frac{۱۸۰^\circ}{\text{ن}}$$

۹۴ — ایک شکل کثیر الاضلاع مساوی الخطین کے اراضی جسکے ضلعون کا شمار ن ہے بنام کسی ضلع شکل مذکور کے نکالو (شکل دفعہ ۹۲ کے دیکھو)

ت ر ایک ضلع شکل کثیر الزاویہ و اضلاع مذکور کا ہے۔

رقبہ = ن × △ و ت ر = ن × $\frac{1}{2}$ ت ر × ب و

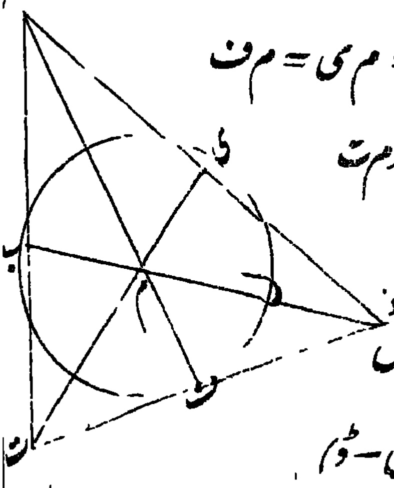
= $\frac{1}{2}$ ن × ت ر × ت ب × کوٹ ت د ب

= $\frac{1}{2}$ ن × ت ر × $\frac{1}{2}$ ت ر × کوت $\frac{180°}{ن}$

= $\frac{1}{4}$ ن × (ت ر)^2 × کوٹ $\frac{180°}{ن}$

۹۵ - اون دائرون کے نصف القطرون کو دریافت کرو جو ایک مثلث کے اندر اور باہ جسکے اضلاع معلوم ہین کہینچے گئی ہین۔

فرض کرو کہ وے خطوط جو زاویہ جات ت د ر کے تنصیف کرتے ہین نقطہ م مین ایک دوسرے سے ملتی ہین م سے م ب، م ی، م ف عمود وہ مثلث کے ضلعون پر گراؤ ∴ بموجب شکل چہارم مقالہ چہارم کے م مرکز ہی اوس دائرہ کا جو مثلث کے اندر کہینچا گیا ہے اور اوسکا نصف القطر ژ = م ب = م ی = م ف

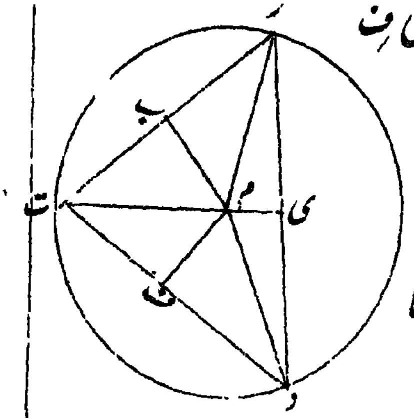


چونکہ اراضی △ ت ر د = △ ت م ر + △ ر م د + △ د م ت

∴ $\sqrt{}$ {س (س - ٹ) × (س - ڑ) × (س - ڈ) }

= ژ × $\frac{1}{2}$ ڈ + ژ × $\frac{1}{2}$ ٹ + ژ × $\frac{1}{2}$ ڑ = ژ × س

∴ ژ = $\sqrt{\frac{(س - ٹ) \times (س - ڑ) \times (س - ڈ)}{س}}$ .... (۱)



بار دیگر مثلث مذکور کے اضلاع کو نقاط ب ری ف مین تصنیف کرو اور ان نقاط سے عمود نکالو جو نقطہ م مین ملجاوین گی اور یہی نقطہ م مرکز ہیگا اوس دائرہ کا جو مثلث مذکور کے باہر کھنچا جائیگا ز جو دائرہ مذکور کا نصف القطر ہے

= م ت = م ر = م و .... (شکل ۵ مقالہ ۴)

اور ∴ ت = $\frac{۱}{۲}$ ر م و .... (شکل ۲۰ مقالہ سوم)

∴ سن ت = سن $\frac{۱}{۲}$ ر م و = سن ر م ی = $\frac{\text{ری}}{\text{رم}}$ = $\frac{\frac{۱}{۲}\text{ٹ}}{\text{ز}}$

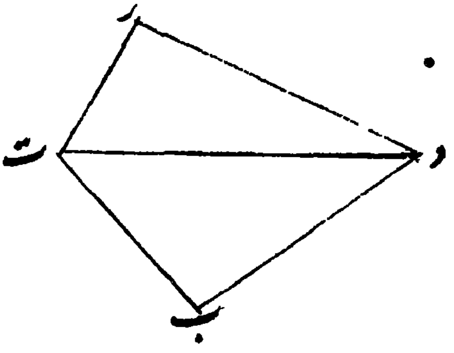
اسلیے بموجب دفعہ ۶۶ ، ر ، $\frac{۲}{\text{ڑ×ڈ}}$ × ۲√{س(س-ٹ)×(س-ڑ)×(س-ڈ)}

= $\frac{\frac{۱}{۲}\text{ٹ}}{\text{ز}}$

= $\frac{\text{ٹ×ڑ×ڈ}}{\text{۴√\{س(س-ٹ)×(س-ط)×(س-ڈ)\}}}$ ......(۲۶)

۹۶ — ایک شکل اربعۃ الاضلاع کے اراضی نکالو کہ جس کے مقابل کے زاوئے ایک دوسرے کے ضمیمی ہین- یعنے (تمامی دو قائمہ)

فرض کرو کہ ت ر و ب شکل اربعۃ الاضلاع ہے



یہ بھی فرض کرو کہ ت ر = ٹ

ر و = ڑ

و ب = ڈ

ب ت = پ

ت کو و سے ملا دو

تو اراضی ت ر و ب = △ ت ر و + △ ت ب و

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{ڑ} \times \text{ٹ} \times \text{سن ر} + \tfrac{1}{2}\,\text{ڈ} \times \text{پ} \times \text{سن ب}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,(\text{ٹ} \times \text{ڑ} + \text{ڈ} \times \text{پ}) \times \text{سن ر}$$ اسلئے کہ

$$\text{سن ب} = \text{سن}\,(180^\circ - \text{ب}) = \text{سن ر}$$

اب △ ت ر و سے $\text{ٹ}^2 + \text{ڑ}^2 - \text{ت و}^2 = 2\,\text{ٹ} \times \text{ڑ} \times \text{کوس ر}$

اور △ ت ب و $\text{ڈ}^2 + \text{پ}^2 - \text{ت و}^2 = 2\,\text{ڈ} \times \text{پ} \times \text{کوس ب}$

$$= -2\,\text{ڈ} \times \text{پ} \times \text{کوس ر}$$

اسلئے ان دونوں کو تفریق کرنے سے

$$\text{ٹ}^2 + \text{ڑ}^2 - \text{ڈ}^2 - \text{پ}^2 = 2\,(\text{ٹ} \times \text{ڑ} + \text{ڈ} \times \text{پ}) \times \text{کوس ر}$$

$$\therefore \text{سن}^2\,\text{ر} = 1 - \text{کوس}^2\,\text{ر} = 1 - \left\{\frac{\text{ٹ}^2 + \text{ڑ}^2 - \text{ڈ}^2 - \text{پ}^2}{2\,(\text{ٹ} \times \text{ڑ} + \text{ڈ} \times \text{پ})}\right\}^2$$

= [٤ (ث × ر + د × پ)^٢ − (ث^٢ + ر^٢ − د^٢ − پ^٢)^٢] / ٤ (ث × ر + د × پ)^٢

اور (اراضی ت ر و ب)^٢ = ١/٤ (ث × ر + د × پ)^٢ × سن^٢ ر

∴ = ١/١٦ {٤ × (ث × ر + د × پ)^٢ − (ث^٢ + ر^٢ − د^٢ − پ^٢)^٢}

= ١/١٦ {٢ (ث × ر + د × پ) + ث^٢ + ر^٢ − د^٢ − پ^٢} × {٢ (ث × ر + د × پ) − (ث^٢ + ر^٢ − د^٢ − پ^٢)}

= ١/١٦ {(ث + ر)^٢ − (د − پ)^٢} × {(د + پ)^٢ − (ث − ر)^٢}

= ١/١٦ (ث + ر + د − پ) × (ث + ر + پ − د) × (د + پ + ث − ر) × (د + پ + ر − ث)

اور اگر س = ١/٢ (ث + ر + د + پ)

اراضی ت ر و ب = √{(س − ث) × (س − ر) × (س − د) × (س − پ)}

٩٧ — کسی مساوات مین جزون غیر معلومہ کا معلوم کرنا سہل ہوسکتا ہے اگر مساوات مذکورہ کو بذریعہ تناسبات مساح الزاویہ کے دو اور مساواتون مین منقسم کرڈالین جیسا کہ دفعات ٣٤ و ٥٥ مین مستعمل ہوا ہے اور تمثیلات مندرجہ ذیل [illegible]

١ اگر ث، ط، لا معلوم ہون تو سن ث = کوسن ل × کوسن لا × کوسن ث + سن ل [illegible]

کو ایسی صورت مین جسمین قاعدہ لوگارثم کے مستعمل ہوسکین ۔
مساوات اس طرح لکھے جاسکتے ہین

سن ث = سن لا × (سن ل + [illegible]) [illegible]

اب چونکہ ٹانجنٹ ہر مقدار اور علامت کے ہیں اسلیے کوئی زاویہ ع ایسا ہوسکتا ہی کہ

$$\text{ٹان ع یا } \frac{\text{سن ع}}{\text{کوس ع}} = \frac{\text{کوس لا} \times \text{کوس ط}}{\text{سن لا}}$$

$$= \text{کوٹ لا} \times \text{کوس ط} \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$\therefore \text{سن ٹ} = \text{سن لا} \times \left(\text{سن ل} + \text{کوس ل} \times \frac{\text{سن ع}}{\text{کوس ع}}\right)$$

$$= \frac{\text{سن لا}}{\text{کوس ع}} \times (\text{سن ل} \times \text{کوس ع} + \text{کوس ل} \times \text{سن ع})$$

$$= \frac{\text{سن لا}}{\text{کوس ع}} \times \text{سن}(\text{ل} + \text{ع})$$

$$\therefore \text{سن}(\text{ل} + \text{ع}) = \frac{\text{سن ٹ} \times \text{کوس ع}}{\text{سن لا}} \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

(۱) سے $\text{ل ٹان ع} = \text{ل کوٹ لا} + \text{ل کوس ط} - ۱۰$ اس سے ع نکلتا ہے

(۲) سے $\text{ل سن}(\text{ل} + \text{ع}) = \text{ل سن ٹ} + \text{ل کوس ع} - \text{ل سن لا}$

اس سے ل + ع نکلتا ہے اور تب ل نکلتا ہے

(۴) $\text{ٹ} \times \text{کوس ک} + \text{ڑ} \times \text{کوس}(\text{ک} + \text{ط})$ کو بشکل $\text{ت} \times \text{کوس}(\text{ر} + \text{ک})$ ظاہر کرو

فرض کرو کہ $\text{گ} = \text{ٹ} \times \text{کوس ک} + \text{ڑ} \times \text{کوس}(\text{ک} + \text{ط})$

$$= \text{ٹ} \times \text{کوس ک} + \text{ڑ} \times \text{کوس ط} \times \text{کوس ک} - \text{ڑ} \times \text{سن ط} \times \text{سن ک}$$

$$= \text{ٹ} \times \left(۱ + \frac{\text{ڑ}}{\text{ٹ}} \times \text{کوس ط}\right) \times \text{کوس ک} - \text{ڑ} \times \text{سن ط} \times \text{سن ک}$$

فرض کرو کہ ع وہ زاویہ ہی جسکا ٹانجنٹ $\frac{\text{ڑ}}{\text{ٹ}}$ کوس ط ہی یعنی $\text{ٹانجنٹ ع} = \frac{\text{ڑ}}{\text{ٹ}} \times \text{کوس ط} \ldots\ldots (۱)$

$$\because\ ۱ + \frac{\text{ر}}{\text{ث}} \times \text{کوس ط} = ۱ + \text{ٹان ع} = \frac{\text{کوس ع} + \text{سن ع}}{\text{کوس ع}}$$

$$= \sqrt{۲} \times \frac{\frac{۱}{\sqrt{۲}} \times \text{کوس ع} + \frac{۱}{\sqrt{۲}} \times \text{سن ع}}{\text{کوس ع}}$$

$$= \sqrt{۲} \times \frac{\text{سن } ۴۵^{\circ} \times \text{کوس ع} + \text{کوس } ۴۵^{\circ} \times \text{سن ع}}{\text{کوس ع}}$$

$$= \sqrt{۲} \times \frac{\text{سن} \times (۴۵^{\circ} + \text{ع})}{\text{کوس ع}}$$

$$\therefore\ \text{ر} = \text{ث} \times \sqrt{۲} \times \frac{\text{سن}(۴۵^{\circ} + \text{ع})}{\text{کوس ع}} \times \left\{ \text{کوس ک} - \frac{\text{ر} \times \text{سن ط} \times \text{کوس ع}}{\text{ث} \times \sqrt{۲} \times \text{سن}(۴۵^{\circ} + \text{ع})} \times \text{سن ک} \right\}$$

فرض کرو $\text{ٹان عَ} = \frac{\text{ر} \times \text{سن ط} \times \text{کوس ع}}{\text{ث} \times \sqrt{۲} \times \text{سن}(۴۵^{\circ} + \text{ع})}$ ....(۲)

تو $\text{ر} = \text{ث} \times \sqrt{۲} \times \frac{\text{سن}(۴۵^{\circ} + \text{ع})}{\text{کوس ع} \times \text{کوس عَ}} \times \text{کوس}(\text{عَ} + \text{ک})$ ....(۳)

اور یہی نتیجہ ہے شکل مطلوبہ کا

۳ $\sqrt{\frac{\text{ث} - \text{ر}}{\text{ث} + \text{ر}}} + \sqrt{\frac{\text{ث} + \text{ر}}{\text{ث} - \text{ر}}}$ کو ایسی صورت مین کہ جسمین قاعدہ لوگارتم کی آسکیں لاؤ

$$\sqrt{\frac{\text{ث} - \text{ر}}{\text{ث} + \text{ر}}} + \sqrt{\frac{\text{ث} + \text{ر}}{\text{ث} - \text{ر}}} = \frac{\text{ث} - \text{ر} + \text{ث} + \text{ر}}{\sqrt{(\text{ث}^{۲} - \text{ر}^{۲})}} = \frac{۲\text{ث}}{\sqrt{(\text{ث}^{۲} - \text{ر}^{۲})}} = \frac{۲}{\sqrt{\left(۱ - \frac{\text{ر}^{۲}}{\text{ث}^{۲}}\right)}}$$

اب $\frac{\text{ر}^{۲}}{\text{ث}^{۲}}$ خواہ نخواہ مثبت ہے اور کسی مقدار کا ہوسکتا ہے فرض کرو اسلیئے کہ ک ایسا ایک زاویہ ہے کہ $\text{ٹان}^{۲}\ \text{ک} = \frac{\text{ر}^{۲}}{\text{ث}^{۲}}$ ....(۱)

$$\therefore\ \frac{۲}{\sqrt{\left(۱ - \frac{\text{ر}^{۲}}{\text{ث}^{۲}}\right)}} = \frac{۲}{\sqrt{\left\{۱ - \left(\frac{\text{سن ک}}{\text{کوس ک}}\right)^{۲}\right\}}} = \frac{۲\ \text{کوس ک}}{\sqrt{\text{کوس}^{۲}\text{ک} - \text{سن}^{۲}\text{ک}}}$$

$= \frac{۲\ \text{کوس ک}}{\text{کوس}^{\frac{۱}{۲}}\ ۲ \times \text{ک}}$ اور یہ بھی ایک شکل ہے شکل مطلوبہ کے ....(۲)

تمثیلات

۱- ثابت کرو کہ ۵۴° ,۱۵' ,۲۰" = ۶۰گ ,۲۸ ,۳۹٫۵ اور ۱۰° ,۱۵' ,۲۷" = ۱۱گ ,۳۹ ,۷۲٫۲ اور ۱۸° ,۱۰' ,۴۸" = ۲۰گ ,۲۰ اور $\frac{۱۰۱°}{۳}$ = ۱۱۵ ,۷۴

۲- ظاہر کرو کہ تامیم ۱۷° ,۳۶' ,۳" ,۴۹° ,۲۷ ,۳۴ و ۲۱۶° ,۲۵ کے برابر ہیں ۷۲° ,۲۳' ,۵۷" و ۴۰° ,۳۲ ,۲۶ و ۱۲۶° ,۲۵ کے

۳- دیکھلاو کہ ضمیمہ جات ۷۳° ,۴۳' ,۳" و ۱۱۵° ,۳ ,۶۶ و ۲۶۴° ,۴۳ ,۱۷ کے برابر ہیں ۱۴۸° ,۵ ,۲۵ و ۶۴° ,۳۶ ,۳۴ و ۳۵° ,۵ و (۲۶۴° ,۴۳ ,۱۷) کے

۴ (۱) اگر کوٹ ت = $\frac{۳}{۴}$ تو مقادیر سن ت و کوسک ت و کسن ت وسک ت کے دریافت کرو

(۲) کس زاویہ کا سن وہ ہوگا جو ۴۳° کا ہے جواب اول م × ۱۸۰° + ت کا (بموجب دفعہ ۴۴ کے) اس جواب کا نتیجہ اگر م کے اعداد ۰ و ۱ و ۲ وغیرہ مقرر کریں تو یہ ہوگا ۴۳° و ۲۲۳° و ۴۰۳° اور اگر م کے اعداد -۱ و -۲ و -۳ وغیرہ مقرر کریں تو یہ ہوگا -۱۳۷° و -۳۱۷° و -۴۹۷° جواب دوم (۲م + ۱) × ۱۸۰° - ت کا* اس جواب کا نتیجہ -۱۳۷° و ۲۲۳° و ۵۸۳° ہوگا اگر م کے اعداد ۰ و ۱ و ۲ وغیرہ مقرر کیجاویں اور -۵۰۰° -۸۶۰° و -۱۲۲۰° ہوگا اگر م کے اعداد -۱ و -۲ و -۳ وغیرہ کیجاویں —

(۴) وے کون زاوے ہین جنکے ٹانجنٹ کے مقادیر وے ہین جو −۱۱۰° کے ٹانجنٹ کا ہے مگر مختلف العلامت ہین جواب ۱۱۰° ، ۲۹۰° ، ۴۷۰° ، ۶۵۰°..... اور −۷۰° ، −۲۵۰° ، −۴۳۰° یہہ زاویہ جات صورت م × ۱۸۰° + ۱۱۰° * سے نکلے ہین جسمین م ۰ ہے یا کوئی مثبت یا منفی عدد صحیح ہے۔ * نمبر

۵ ۔ مفصلہ ذیل کے صورتونکو ثابت کرو

(۱) $\text{سک}^2\,\text{ت} \times \text{کوسک}^2\,\text{ت} = \text{سک ت} + \text{کوسک}^2\,\text{ت}$

(۲) $\text{کوٹ}^2\,\text{ت} \times \text{کوس}^2\,\text{ت} = \text{کوٹ}^2\,\text{ت} - \text{کوس}^2\,\text{ت}$

(۳) $\text{کوس ت} = \dfrac{\text{کوٹ ت}}{\sqrt{(\text{۱} + \text{کوٹ}^2\,\text{ت})}}$ (۴) $\text{ورسن ت} = \dfrac{\text{سک ت} - \text{۱}}{\text{سک ت}}$

(۵) $\text{سن ت} \times \text{کوس ت} = \dfrac{\text{۱}}{\text{ٹان ت} + \text{کوٹ ت}}$

۶ ۔ (۱) اگر $\text{ٹان}^2\,\text{ت} + \text{۴}\,\text{سن}^2\,\text{ت} = \text{۶}$ تو $\text{ت} = \text{۶۰}^\circ$

(۲) اگر $\text{م} = \text{ٹان ت} + \text{سن ت}$ اور $\text{ن} = \text{ٹان ت} - \text{سن ت}$ تو $\text{کوس ت} = \dfrac{\text{م} - \text{ن}}{\text{م} + \text{ن}}$

(۳) اگر $\text{م} \times \text{سن ت} = \text{ن} \times \text{کوس ت}$ تو $\text{سن ت} = \pm \dfrac{\text{ن}}{\sqrt{\text{م}^2 + \text{ن}^2}}$

(۴) اگر $\text{۱} = \left(\dfrac{\text{سن ت}}{\text{سن ز}}\right)^2 + (\text{کوس ت} \times \text{کوس د})^2$ تو $\text{سن د} = \dfrac{\text{ٹان ت}}{\text{ٹان ز}}$

(۵) اگر $\text{کوس لا} = \dfrac{\text{کوس ت}}{\text{سن د}}$ اور $\text{کوس} (\text{۹۰}^\circ - \text{لا}) = \dfrac{\text{کوس ز}}{\text{سن د}}$

تو $\text{کوس}^2\,\text{ت} + \text{کوس}^2\,\text{ز} + \text{کوس}^2\,\text{د} = \text{۱}$

۷ — مندرجہ ذیل کے صورتون کو ثابت کرکے دیکھلاؤ

(۱) ٹان ت + کوٹ ت = ۲ کوسک ۲ ت ، (۲) کوٹ ت − ٹان ت = ۲ کوٹ ۲ ت

(۳) $\text{ٹان ت} = \dfrac{\text{سن ۲ ت}}{\text{۱ + کوس ۲ ت}}$ (۴) $\sqrt{\dfrac{\text{۱ + سن ت}}{\text{۱ − سن ت}}} = \dfrac{\text{۱ + ٹان} \tfrac{۱}{۲}\text{ ت}}{\text{۱ − ٹان} \tfrac{۱}{۲}\text{ ت}}$

(۵) کوسک ۲ ت + کوٹ ۲ ت = کوٹ ت (۶) ۲ کوسک ۲ ت = سک ت × کوسک ت

(۷) $\dfrac{\text{سن ت}}{\text{۱ − کوس ت}} = \text{کوٹ } \tfrac{۱}{۲}\text{ ت}$ (۸) $\dfrac{\text{ورسن ت}}{\text{ورسن (۱۸۰° − ت)}} = \text{ٹان}^{۲} \tfrac{۱}{۲}\text{ ت}$

(۹) $\text{۸ کوٹ ۲ ت} \times \text{کوسک}^{۲}\text{ ۲ ت} = \text{کوٹ ت} \times \text{کوسک}^{۲}\text{ ت} - \text{ٹان ت} \times \text{سک}^{۲}\text{ ت}$

(۱۰) $\text{ورسن (۱۸۰° − ت)} = \text{۲ ورسن } \tfrac{۱}{۲}\text{ (۱۸۰° + ت)} \times \text{ورسن } \tfrac{۱}{۲}\text{ (۱۸۰° − ت)}$

(۱۱) $\text{سک ۲ ت} = \dfrac{\text{کوٹ ت + ٹان ت}}{\text{کوٹ ت − ٹان ت}}$ (۱۲) $\text{ٹان}^{۲} \tfrac{۱}{۲}\text{ ت} = \dfrac{\text{۲ سن ت − سن ۲ ت}}{\text{۲ سن ت + سن ۲ ت}}$

(۱۳) $\text{کوسک ۲ ت} = ۲ \times \dfrac{\text{کوس ۲ ت + سن ۲ ت}}{\text{(کوس ت − سن ت) − (کوس ۳ ت − سن ۳ ت)}}$

(۱۴) $\text{کوسن ت} = (\text{کوس } \tfrac{۱}{۲}\text{ ت − سن } \tfrac{۳}{۲}\text{ ت})^{۲} + \text{۲ کوس } \tfrac{۱}{۲}\text{ ت} \times \text{سن } \tfrac{۳}{۲}\text{ ت} \times (\text{کوس } \tfrac{۱}{۲}\text{ ت − سن } \tfrac{۱}{۲}\text{ ت})$

(۱۵) $\text{۲}\sqrt{\text{۱ + سن ت}} = \text{۱ + ۲ سن } \tfrac{۱}{۲}\text{ ت} \times \text{۲}\sqrt{\text{۱ − سن } \tfrac{۱}{۲}\text{ ت}}$

اسمین یہ بھی ظاہر کرو کہ علامت جذر کی اسس مساوات مین ٹھیک ہی اگر ت درمیان ۹۰° اور ۱۸۰° کے ہو۔

(۱۶) $\text{کوٹ ت + کوٹ ۲ ت + کوٹ ۳ ت} = \dfrac{۱}{\text{سن ۳ ت}} \times (\text{۲ + ۲ کوس ۲ ت + ۳ کوس ۳ ت})$

(۱۷) ثابت کرو کہ $\dfrac{\text{سک (}۲^{\text{ن}+۱} \times \text{ت)} - ۱}{\text{سک (}۲^{\text{ن}} \times \text{ت)} - ۱} = \dfrac{\text{ٹان (}۲^{\text{ن}+۱} \times \text{ت)}}{\text{ٹان (}۲^{\text{ن}-۱} \times \text{ت)}}$

اور اس سے ظاہر کرو کہ

$$\frac{\text{(سک ۲ت − ۱) × (سک ۲}^{\text{۳}}\text{ت − ۴) × (سک ۲}^{\text{۵}}\text{ت − ۱) ... ن تک}}{\text{(سک ت − ۱) × (سک ۲}^{\text{۲}}\text{ت − ۱) × (سک ۲}^{\text{۴}}\text{ت − ۱) ... ن تک}} = \text{کوٹ ½ت ٹان (۲}^{\text{۲ن−۱}}\text{ × ت)}$$

(۱۸) کوسک ۲ت + کوس ۴ت = کوٹ ت − کوسک ۴ت

(۱۹) سن ۳ت × سن^{۳} ت + کوس ۳ت × کوس^{۳} ت = کوس^{۳} ۲ت

(۲۰) $$\frac{\text{سن ن × ت}}{\text{کوس ۲ن × ت + کوس ت}} = \frac{\text{سک (ن + ½) × ت − سک (ن − ½) × ت}}{\text{۲ سن ½ ت}}$$ اور اس سے ظاہر کرو کہ

$$\frac{\text{سن ت}}{\text{کوس ۲ت + کوس ت}} + \frac{\text{سن ۲ت}}{\text{کوس ۳ت + کوس ت}} + \frac{\text{سن ۳ت}}{\text{کوس ۴ت + کوس ت}} + \text{... ن تک}$$

$$= \frac{\text{سن ½ن × ت × سن ½ (ن + ۱) × ت}}{\text{سن ت × کوس ½ (۲ن + ۱) × ت}}$$

۸ — اگر زاویہ جات ت، ز، د کسی مقدار کے ہوں تو مندرجۂ ذیل کی مساواتوں کو ثابت کرو

(۱) کوس ۲ت + کوس ۲ز = ۲ کوس (ت + ز) × کوس (ت + ز)

(۲) ۱ + کوس ۲ت × کوس ۲ز = ۲ (سن^{۲} ت × سن^{۲} ز + کوس^{۲} ت × کوس^{۲} ت)

(۳) کوس^{۲} (ت + ز) − سن^{۲} ت = کوس ز × کوس (۲ت + ز)

(۴) $$\frac{\text{سن (ت − ز)}}{\text{سن ت × سن ز}} + \frac{\text{سن (ز − د)}}{\text{سن ز × سن د}} + \frac{\text{سن (د − ت)}}{\text{سن د × سن ت}} = ۰$$

(۵) کوسں (ت + ز) × سن (ت - ز) + کوس (ز + د) × سن (ز - د) + کوسں
(د + ب) × سن (د - ب) + کوسں (ب + ت) × سن (ب - ت) = ۰

(۶) کوس (ت + ز) × سن ز - کوسں (ت + د) × سن د
= سن (ت + ز) × کوس ز - سن (ت + د) × کوس د

(۷) سن (ت + ز) × کوس ز - سن (ت + د) × کوس د = سن (ز - د) × کوس (ت + ز + د)

(۸) سن (ت + ز ۲ د) × کوس ز - سن (ت + د ۲ ز) × کوس د
= سن (ز - د) × ½ {کوس (ز + د - ت) + کوسں (ت + د - ز) + کوس (ت + ز + د)}

(۹) سن ت × سن (ز - د) + سن ز × سن (د - ت) + سن د × سن (ت + ز) = ۰

(۱۰) کوسں ۲ ت + کوسں ۲ ز + کوسں ۲ د
= کوس (ز + د) × کوس (ز - د) + کوس (د + ت) × کوس (د - ت) + کوس (ت + ز) × کوس
(ت - ز) اور سن ۲ ت + سن ۲ ز + سن ۲ د
= سن (ز + د) × کوس (ز - د) + سن (د + ت) × کوس (د - ت) + سن (ت + ز) ×
کوسں (ت - ز)

(۱۱) اگر ۲ س = ت + ز + د
تو ۴ کوس ت × کوس ز × کوس د = کوس ۲ (س - ت) + کوس ۲ (س - ز) + کوس ۲

کوس ۲(س - د) + کوس ۲س اور ۴ سن ت × سن ز × سن د

= سن ۲(س - ت) + سن ۲(س - ز) + سن ۲(س - د) - سن ۲س

(۱۲) سن ز × سن (ت - ز) + سن د × سن (ت - د)

= کوس (ز - د) × کوس ۲(س - ت) - کوس ت

(۱۳) (سن۲ ت + سن۲ ز + سن۲ د) × {سن۲ (ت - ز) + سن۲ (ز - د) + سن۲ (د - ت)}

= ۴{کوس ت - کوس (ز - د) × کوس۲ (س - ت)}۲ + {کوس ز - کوس (د - ت) × کوس۲ (س - ز)}۲ + {کوس د - کوس (ت - ز) × کوس ۲(س - د)}۲ اسمیں ۲س = ت + ز + د

(۱۴)
$$\frac{\text{سن (ت - ز)}}{\text{سن د}} + \frac{\text{سن (ز - د)}}{\text{سن ت}} + \frac{\text{سن (د - ت)}}{\text{سن ز}}$$
$$+ \frac{\text{سن (ت - ز)} \times \text{سن (ز - د)} \times \text{سن (د - ت)}}{\text{سن ت} \times \text{سن ز} \times \text{سن د}} = \text{۰}$$

(۱۵)
$$\left(\frac{\text{ٹان ت}}{\text{ٹان ز}} - \frac{\text{ٹان ز}}{\text{ٹان ب}}\right) + \left(\frac{\text{ٹان ز}}{\text{ٹان د}} - \frac{\text{ٹان د}}{\text{ٹان ز}}\right) + \left(\frac{\text{ٹان د}}{\text{ٹان ت}} - \frac{\text{ٹان ت}}{\text{ٹان د}}\right)$$

$$= \text{۲} \times \frac{\text{سن ۲(ز - ت)} \times \text{سن ۲(د - ز)} + \text{سن ۲(ت - د)}}{\text{سن ۲ت} \times \text{سن ۲ز} \times \text{سن ۲د}}$$

(۱۶) قاعدہ مندرجہ (۱۵) کا اس مقدار کے بھی مساوی ہے

$$\frac{\text{۸ سن (ت - ز)} \times \text{سن (ز - د)} \times \text{سن (د - ت)}}{\text{سن ۲ت} \times \text{سن ۲ز} \times \text{سن ۲د}}$$

۹۔ ثابت کرو کہ

(۱) (۱ + سن ت)/(۱ − سن ت) = ٹان۲ (۴۵° + ½ ت)

(۲) سک (۴۵° + ت) × سک (۴۵° − ت) = ۲ سک ۲ ت

(۳) ۲ سک ت = ٹان (۴۵° + ½ ت) + کوٹ (۴۵° + ½ ت)

(۴) ٹان (۳۰° + ت) × ٹان (۳۰° − ت) = (۲ کوس ۲ ت − ۱)/(۲ کوس ۲ ت + ۱)

(۵) سن (۶۰° + ت) − سن (۶۰° − ت) = سن ت

(۶) √۲(۱ − کوس ت) = سن ت / (سن (۴۵° − ½ ت) + کوس (۴۵° + ½ ت))

(۷) کوس ت + کوس (۱۲۰° − ت) + کوس (۱۲۰° + ت) = ۰

(۸) کوس۲ ت + کوس۲ (۶۰° − ت) + کوس۲ (۶۰° + ت) = ۳/۲

(۹) کوس۴ ت + کوس۴ (۷۲° + ت) + کوس۴ (۲ × ۷۲° + ت) + کوس۴ (۳ × ۷۲° + ت)
+ کوس۴ (۴ × ۷۲° + ت) = ۱۵/۸

(۱۰) سن ۱۵° ، سن ۹° ، کوس ۱۲° ، ورسن ۱۵° ، ٹان ۲۲½° ، سن ۱۵۰° ، کوس ۱۳۵° ، سن ۳°
سن ۷۵° ، سک ۳۲۵° کے جوابات اعداد مین ظاہر کرو اور مندرجہ ذیل کو ثابت کرو

(۱) ٹان ۵۰° + کوٹ ۵۰° = ۲ سک ۱۰°

(۲) ۲ کوس ت/۲ن = √{۲ + √[۲ + ... (ن+۱) (۲ + ۲ کوس ت)]} اسمین ن صحیح عدد مثبت ہے

اور علامت ۲ر ن مرتبہ تکرار کی گئی ہے اور ہر مرتبہ اپنی آگے کسی مقداروں پر عمل کرتے ہے

۱۱— مندرجۂ ذیل کے مساواتوں میں ت کو دریافت کرو یعنے اوسکے مقدار نکالو

(۱) سن ت = سن ۲ ت   (۲) ٹان ۲ ت = ۳ ٹان ت   (۳) ٹان ت = کوسک ۲ ت

(۴) کوس ت = ٹان ت   (۵) ٹان۲ ۲ ت = ۲ ٹان ۲ ت   (۶) ٹان ت + ۳ کوٹ ت = ۴

(۷) ٹان ت × ٹان ۲ ت + کوٹ ت = ۲   (۸) ۳ سن۲ ۲ ت + سن ۶ ت = ۲

(۹) ٹان ت + کوٹ ۲ ت = سن ت (۱ + ٹان ت × ٹان ½ ت)

(۱۰) کوسن ن × ت + کوسن (ن − ۲) × ت = کوسن ت

(۱۱) اگر سن ت + سن ۲ ت + سن ۳ ت = ۰ تو ت کے مقادیر ن × ۱۲۰° اور (۲ن + ۱) × ۱۲۰°
یا (۲ن + ۱) × ۹۰° ہیں انمیں ن کا عدد ۰ یا کوئی عدد صحیح ہے

(۱۲) اگر سن ۷ ت + سن ت = سن ۴ ت تو ت = ن × ۴۵° یا (۶ن ± ۱) × ۱۵°
اس میں ن ایک عدد صحیح ہے۔

(۱۳) اگر کوس ۳ ت + سن ۳ ت = ۱/√۲ تو ت = ن × ۱۲۰° + ۱۵° ± ۲۰° اسمین ن کوئی عدد صحیح ہے

(۱۴) اگر ٹان (۴۵° − ½ ت) + کوٹ (۴۵° − ½ ت) = ۴ تو ت = (۶ن ± ۱) × ۶۰° اسمین ن کوئی عدد صحیح ہے

(۱۵) اگر سن ۵ لا = ۱۶ × سن۵ لا تو لا = م × پ یا م × پ ± پ/۶ اسمین م کوئی صحیح عدد ہے

۱۲— مندرجۂ ذیل کے مساواتوں میں ی کا مقدار دریافت کرو۔

(١) سن (ط − ی) = کوس (ط + ی)

(۲) سن (ی + ط) + کوس (ی + ط) = سن (ی − ط) + کوس (ی − ط)

(۳) سن ط + سن (ی − ط) + سن (۲ی + ط) = سن (ی + ط) + سن (۲ی − ط)

(۴) ٹان ط × ٹان ی = ٹان^{۲} (ط + ی) − ٹان^{۲} (ط − ی) اسمین کوس ی کا جواب نکالو

(۵) م × ورسن ی = ن × ورسن (ط − ی)

(۶) $\frac{\text{م × ٹان (ط − ی)}}{\text{کوس}^{۲}\text{ ی}} = \frac{\text{ن × ٹان ی}}{\text{کوس}^{۲}\text{ (ط − ی)}}$

جواب ٹان (ط − ۲ی) = $\frac{\text{ن − م}}{\text{ن + م}}$ × ٹان ط

(۷) ٹان (ط + ی) × ٹان (ط − ی) = $\frac{\text{١ − ۲ کوس ۲ط}}{\text{١ + ۲ کوس ۲ط}}$ جواب ی = ۳۰°

(۸) ن × سک^{۲} ی × ٹان (ط − ی) = م × سک (ط − ی) × ٹان ی جواب ٹان ۲ی = $\frac{\text{م × سن ۲ط}}{\text{م × ن + کوس ۲ط}}$

(۹) سن ی = سن ط × سن (م + ی) جواب ٹان ی = $\frac{\text{سن ط × سن م}}{\text{١ − سن ط × کوس م}}$

١٠ ٹان ی = کوس ۲ط × ٹان م ظاہر کرو کہ

ٹان (م − ی) = $\frac{\text{ٹان}^{۲}\text{ ½ط × سن}^{۲}\text{ ۲م}}{\text{١ + ٹان}^{۲}\text{ ½ط × کوس ۲م}}$

(١١) $\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \frac{\text{سن ط × کوس (م + ی)}}{\text{سن م × کوس (ط − ی)}}$ یہان ٹان ی کا جواب نکالو

(١۲) اگر ۲ سن (ی − ق) = ١ اور سن (ی − ق) = کوس (ی + ق)

تو ی = ۴۵° اور ق = ١۵°

(۱۳) اگر کوساین ع − ط، ع اور ع + ط کے

تو کوسس ع = √۲ × کوسس ½ ط

(۱۴) اگر ٹان ی = $\frac{\text{سن ط × کوسس م}}{\text{سن م + کوس ط}}$

تو ٹان ½ ی = ٹان ½ ط × ٹان (½ پ − ½ م)

(۱۵) $\frac{\text{سن (ک − م) × کوس ط}}{\text{سن (ع − ط) × کوس ع}} + \frac{\text{کوس (ک + ط) × سن م}}{\text{کوس (ع − م) × سن ط}} = ۰$

اور $\frac{\text{ٹان ک × ٹان ط}}{\text{ٹان ع × ٹان م}} + \frac{\text{کوسس (ط − م)}}{\text{کوس (ط + م)}} = ۰$

تو ٹان ک = ½ (ٹان م + کوٹ ط) اور ٹان ع = ½ (ٹان ط − کوٹ م)

(۱۶) اگر ٹان ی = ن × سن ط × کوس ط ÷ (۱ − ن × سن² ط)

تو ٹان (ط − ی) = (۱ − ن) × ط

(۱۷) اگر ت + ز + د = ۹۰° تو

(۱) ٹان ٹ × ٹان ز + ٹان ت × ٹان د + ٹان ز × ٹان د = ۱

(۲) کوٹ ت + کوٹ ز + کوٹ د = کوٹ ت × کوٹ ز × کوٹ د

(۳) ٹان ت + ٹان ر + ٹان و = ٹان ت × ٹان ر × ٹان و + سک ت × سک ر × سک و

۱۴۔ اگر ت + ر + و = ۱۸۰° تو

(۱) ۴ سن ت × سن ر × سن و = سن ۲ت + سن ۲ر + سن ۲و

(۲) سن² $\frac{۱}{۲}$ت + سن² $\frac{۱}{۲}$ر + سن² $\frac{۱}{۲}$و + ۲ سن $\frac{۱}{۲}$ت × سن $\frac{۱}{۲}$ر × سن $\frac{۱}{۲}$و = ۱

۱۵۔ مندرجہ ذیل کو ثابت کرو۔

(۱) ٹان⁻¹ $\frac{۱}{۲}$ + ٹان⁻¹ $\frac{۱}{۳}$ = ۴۵°   (۲) ٹان⁻¹ $\frac{۱}{۷}$ + ۲ ٹان⁻¹ $\frac{۱}{۳}$ = ۴۵°

(۳) کوٹ⁻¹ $\frac{۳}{۴}$ + کوٹ⁻¹ $\frac{۱}{۷}$ = ۱۳۵°   (۴) سن⁻¹ $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ + کوٹ⁻¹ ۳ = ۴۵°

(۵) اگر لا = کوس⁻¹ $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ اور ع = کوس⁻¹ $\frac{\sqrt{۶}+۱}{۲\sqrt{۳}}$ تو لا + ع = ۳۰°

(۶) اگر لا = ٹان⁻¹ $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ اور ع = ٹان⁻¹ $\frac{۱}{\sqrt{۱۵}}$ تو

سن (ع + لا) = سن ۶۰° × کوس ۳۶°

(۷) اگر کوٹ ی = ن × کوٹ (ط − ی)

تو ۲ی = ط − سن⁻¹ ($\frac{ن-۱}{ن+۱}$ × سن ط)

(۸) اگر ۲ سن⁻¹ (۱ + ی) − ۲ سن⁻¹ (۱ − ی) = ٹان⁻¹ ۲ $\sqrt{۱-ی^۲}$ تو ی = ±۱ یا $\frac{۱}{۲}$

(۹) اگر ۲ سن⁻¹ $\frac{ی}{ا}$ − ۲ سن⁻¹ $\frac{ی}{ط}$ = ۲ سن⁻¹ (۱ − ر²) تو

$\frac{ی}{ط} = \pm\sqrt{\frac{۱-ر^۲}{۱+ر}}$

(۱۰) اگر سن⁻¹ ۲ی − سن⁻¹ ی$\sqrt{۳}$ = سن⁻¹ ی تو ی = ۰ یا ± $\frac{۱}{۲}$

(۱۱) اگر سن [۲ کوس$^{-1}$ {کوٹ (۲ ٹان$^{-1}$ ی)}] = ۰ تو ی = ± ۱ یا ± (۱ ± $\sqrt{۲}$)

(۱۲) معلوم ہی کہ ٹان$^{-1}$ $\frac{۱}{۴}$ + ۲ ٹان$^{-1}$ $\frac{۱}{۵}$ + ٹان$^{-1}$ $\frac{۱}{۶}$ + ٹان$^{-1}$ ی = $\frac{۱}{۴}$ پ تو ظاہر کرو کہ ی = $\frac{۲۲۶}{۲۳۵}$

(۱۳) ثابت کرو کہ ٹان$^{-1}$ ($\frac{۱}{۲}$ ٹان ۲ ت) + ٹان$^{-1}$ (کوٹ ت) + ٹان$^{-1}$ (کوٹ^{۳} ت) = ۰

(۱۴) دیکھلاو کہ ٹان (۲ ٹان$^{-1}$ ط) = ۲ ٹان (ٹان$^{-1}$ ط + ٹان$^{-1}$ ط^{۳})

(۱۵) اگر سن$^{-1}$ ی + سن$^{-1}$ $\frac{۱}{۲}$ ی = $\frac{۱}{۴}$ پ تو ی = $\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۵+۲\sqrt{۲}}}$

(۱۶) دیکھلاو (اسمیں ح < $\frac{۱}{۲}$ پ) کہ ۲ ٹان$^{-1}$ [ٹان ($\frac{۱}{۴}$ پ − $\frac{۱}{۲}$ ط) × ٹان $\frac{۱}{۲}$ ح]

= کوس$^{-1}$ $\frac{\text{ٹان ط + کوس ح}}{\text{۱ + ٹان ط × کوس ح}}$

(۱۷) مجموعہ کئی زاویوں سن$^{-1}$ $\frac{۲\, ٹ \times ڑ}{ٹ^{۲} + ڑ^{۲}}$ ، سن$^{-1}$ $\frac{۲\, \bar{ٹ} \times \bar{ڑ}}{\bar{ٹ}^{۲} + \bar{ڑ}^{۲}}$ ..... وغیرہ کا اس شکل یعنے سن$^{-1}$ $\frac{۲\, م \times ن}{م^{۲} + ن^{۲}}$ مین لکھا جا سکتا ہے اسمین۔

(۱۸) ثابت کرو کہ کوٹ$^{-1}$ {$\frac{۲}{ط}$ + $\frac{۱}{۲}$ ن × (ن + ۱) × ط}

= ٹان$^{-1}$ $\frac{۱}{۲}$ (ن + ۱) × ط − ٹان$^{-1}$ $\frac{۱}{۲}$ ن × ط

اور اس سے مندرجۂ ذیل کے سلسلہ کو جمع کرو

کوٹ$^{-1}$ ($\frac{۲}{ط}$ + ط) + کوٹ$^{-1}$ ($\frac{۲}{ط}$ + ۳ ط) + کوٹ$^{-1}$ ($\frac{۲}{ط}$ + ۶ ط) + کوٹ$^{-1}$ ($\frac{۲}{ط}$ + ۱۰ ط) وغیرہ

جواب حاصل جمع = کوٹ$^{-1}$ ($\frac{۲}{ن \times ط}$ + $\frac{ن + ۱}{۲}$ × ط)

(۱۹) دیکھلاو کہ $\frac{۱}{۲}$ ٹ^{۳} × کوسک ($\frac{۱}{۲}$ ٹان$^{-1}$ $\frac{ٹ}{ڑ}$) + $\frac{۱}{۲}$ ڑ^{۳} × سک ($\frac{۱}{۲}$ ٹان$^{-1}$ $\frac{ڑ}{ٹ}$)

= (ٹ + ڑ) × (ٹ^{۲} + ڑ^{۲})

۱۶ (۱) اگر م = ٹان ھ – سن ھ اور ن = ٹان ھ + سن ھ تو ن اور م مین جو نسبت ہے اوسکو دریافت کرو —

(۲) اگر ٹان ھ = $\frac{\text{ڑ}}{\text{ٹ}}$ تو ٹ × کوس ۲ ھ + ڑ × سن ۲ ھ = ٹ

(۳) اگر (ی – ٹ) × کوس پ + ڈ × سن (ل – پ) = ۰

اور (ق – ڑ) × کوس پ + و × کوس (ل – پ) = ۰

تو (ی – ٹ) × سن ل + (ق – ڑ) × کوس ل + ڈ = ۰

(۴) اگر ٹ × سن^{۲} ھ + $\bar{\text{ٹ}}$ × کوس^{۲} ھ = ڑ اور $\bar{\text{ٹ}}$ × سن^{۲} ھ + ٹ × کوس^{۲} ھ = $\bar{\text{ڑ}}$

اور ٹ × ٹان^{۲} ھ = $\bar{\text{ٹ}}$ × ٹان^{۲} ھ تو ٹ × $\bar{\text{ٹ}}$ = ڑ × $\bar{\text{ڑ}}$

(۵) اگر ٹان ھ = ٹان^{۳} $\frac{۱}{۲}$ ع اور کوس^{۲} ع = $\frac{\text{م} - ۱}{۲}$

$$\text{تو م} = \frac{۲}{\left(\text{کوس}^{\frac{۲}{۳}}\,\text{ھ} + \text{سن}^{\frac{۲}{۳}}\,\text{ھ}\right)^{\frac{۳}{۲}}}$$

(۶) اگر کوس و = $\frac{\text{کوس آ} - \text{ی}}{۱ - \text{ی} \times \text{کوس آ}}$ تو ٹان $\frac{۱}{۲}$ و = $\sqrt{\frac{۱ + \text{ی}}{۱ - \text{ی}}}$ × ٹان $\frac{۱}{۲}$ آ

(۷) اگر ٹ × سک^{۲} ھ – ڑ × کوس ھ = ۲ ٹ اور ڑ × کوس^{۲} ھ – ٹ × سک ھ = ۲ ڑ

تو ٹ^{۲} = ڑ ۲

(۸) اگر ٹ × ٹان ت + ڑ × ٹان ر = (ٹ + ڑ) × ٹان $\frac{۱}{۲}$ (ت + ر) تو ٹ × کوس ر = ڑ × کوس ت

(۹) اگر کوس ط = کوس ص × کوس ع = کوس صَ × کوس عَ

اور سن ط = ۲ سن ½ ع × سن ½ عَ تو ٹان ½ ط = ٹان ½ ص × ٹان ½ صَ

(۱۰) اگر سن لا × سن (ط − ص) = سن ص × سن (ط + لا) تو ظاہر کرو کہ

کوٹ ص − کوٹ لا = کوٹ (ط + لا) + کوٹ (ط − ص)

(۱۱) اگر مساوات (ٹ + ڑ) × ٹان (لا − ع) = (ٹ − ڑ) × ٹان (لا + ع) اور ٹ × کوس ۲ ع + ڑ × کوس ۲ لا = ڈ سے لا خارج کی جاوے تو وہ مساوات جو اس سے نکلے گی یہ ہوگی $ٹ^{۲}$ + $ڈ^{۲}$ − ۲ ٹ × ڈ × کوس ۲ ع = $ڑ^{۲}$

(۱۲) اگر $\text{کوس}^{۲}$ لا = $\frac{\text{کوس ط}}{\text{کوس ص}}$ ، $\text{کوس}^{۲}$ لاَ = $\frac{\text{کوس طَ}}{\text{کوس صَ}}$ اور $\frac{\text{ٹان لا}}{\text{ٹان لاَ}}$ = $\frac{\text{ٹان ط}}{\text{ٹان طَ}}$

تو ٹان ½ ص = ٹان ½ ط × ٹان ½ طَ

(۱۳) اگر (ٹ + ڑ) × سن لا + (ٹ − ڑ) × کوس لا = $\sqrt{}$($ٹ^{۲}$ + $ڑ^{۲}$) اور ٹ × $\text{سن}^{۳}$ لا + ڑ × $\text{کوس}^{۳}$ لا = $\sqrt{\text{۳ ٹ × ڑ}}$ تو $\frac{\text{ٹ}}{\text{ڑ}}$ = ۲ ± $\sqrt{۳}$ یا $(\frac{\text{ٹ}}{\text{ڑ}})^{۴}$ + $\frac{\text{ٹ}}{\text{ڑ}}$ + ۱ = ۰

(۱۴) اگر ٹ × سن ط + ڑ × سن ص + ڈ × سن ف = ۰ اور ٹ × کوس ط + ڑ × کوس ص + ڈ × کوس ف = ۰ تو

ٹ : ڑ : ڈ : : سن (ص − ف) : سن (ف − ط) : سن (ط − ص)

(۱۵) اگر مساواتوں مندرجہ ذیل

یعنی ب = (سن ع / ط۲ + کوس ع / ج۲) × کوس ی + سن۲ ی / ط۲ ج۲ .... (۱)

ز = کوس۲ ع / ط۲ + سن۲ ع / ز۲ .... (۲)

و = (۱/ز۲ − ۱/ط۲) × سن ع × کوس ع × کوس ی ... (۳) [illegible]

اور ی خارج کئے جاوین تو وہ مساوات جو اس سے نکلے گی وہ یہ ہوگی۔

(ب − ۱/ط۲) × (ز − ۱/ج۲) × (ز − ۱/ز۲) = و۲ × (ز + ۱/د۲ − ۱/ط۲ − ۱/ج۲)

(۱۴) ی د کوس ۳ ط + لا × سن ۳ ط = ط۲ (کوس ۲ ط) [illegible]

× کوس ۳ ط = ث (کوس ۱/۲ ط) ۱/۲ × ۲ ط ان مساواتون سے [illegible] خارج کیا جاوے

تو مساوات یہ ہوگی (ی۲ + ن۲)۲ = ث۲ (ی۲ − لا۲)

(۱) مثلث قائمۃ الزاویہ روت کا ت زاویہ قائمہ ہی تو کوس (۲ ر − و) = ...+ (۳ ث۲ − ۳ ر۲)

(۲) سطح = (نصف جملۃ الحدود) (نصف جملۃ الحدود − ضلع مقابل زاویہ قائمہ)

(۳) اگر جملۃ الحدود اور زاویہ ت سے ث پر کا عمود معلوم ہو تو تینون ضلع دریافت کرو

(۴) ایک شخص نے ایک برج کی اونچائی کے زاویہ کو ۶۰° دریافت کیا اور اوس مقام سے ۱۰۰ گز پیچھے ہٹ کر اونچائی زاویہ ۳۰° دریافت ہوئی تو بلندی برج کیا ہوگی۔

(۵) ایک مدور برج پر ایک کاو دم مینار ہے برج کے پائین سے اور ایک پیمودی فاصلہ سے قلعہ یا برج اور مینار قلعہ کا زاویہ ارتفاعی معلوم ہوا تو دریافت کرو کہ برج اور

مینار کی اونچائی کیا ہوگی اول جب فاصلہ کو سطح افقی پر ناپ لیوین اور دوم جبکہ اوسکو ایک ایسے سطح پر ناپین جو سطح افقی سے ایک دیا ہوا زاویہ نباوے۔

(۶) ایک شخص نے ایک برج کے پاس سے دو سو ۰ ۸ کرکے فاصلہ سے دیکھا کہ اوسکی اونچائی کا زاویہ ۵۳° ۸' مثال ہے تو برج کی اونچائی کا لوگارثم دریافت کرو ل ٹان

۵۳° ۸' = ۱۰٫۱۳۴۹۸۱۸ ل ۳۰۰ = ۲٫۴۳۵۹۳۹۲۵ -

(۷) مثلث قائمہ الزاویہ کے قایمہ کے سامنے والہ ضلع ۳۰۰۰۴۰۸۰۷ اور ایک زاویہ ۴۳° ۱' ہے تو سامنی والہ ضلع کا لوگارثم دریافت کرو ل کوسک ۴۳° ۱' = ۔

۱۰٫۲۱۷۵۳۵۷ ل ۴۳۵۰۰٫۷ = ۵٫۷۰۱۵۰۹۰

(۸) ایک مثلث متساوی الاضلاع ایسا بنایا جاوے کہ تینون کون مثلث متساوی الساقین قائمہ الزاویہ کے تینون حلقون پر ہون اور اوسکا ایک ضلع وتر کے متوازی ہو تو اگر مثلث قائمہ الزاویہ کے ایک ضلع ح ہو تو مثلث متساوی الاضلاع کے سطح برابر ہے ۲ ج۲ سن ۳۰° سن ۱۵°

(۹) اب ح ایک مثلث قایمہ الزایہ ہے کہ جس کا قایمہ کے سامنے والہ ضلع اب ہے اگر شش ایک دائرہ کا نصف قطر ہو جو اور اب اور اج کے بڑہائے ہوئے جصو نکو اور ب ج کو چھوتا ہوا اور ش ہ دوسرا دائرہ ہو جو ب ا اور ب ج کے

بڑھائے ہوی حصون کو اور اج کو چھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ سطح مثلث = ش × ش

(۱۰) دو دائرہ جنکی نصف قطر ب اور ج ہین باہر سے آپسمین چھوتے ہین اور اگر دو خط جو دونون کا مماس ہے زاویہ ط بناوے تو $\text{سن ط} = \frac{۴(\text{ب}-\text{ج})\sqrt{\text{ب ج}}}{(\text{ب}+\text{ج})^{۲}}$

(۱۱) د ب ر ایک مثلث قائمۃ الزاویہ ہے جس کا ر زاویہ قایمہ ہے اور د ب سامنے والا ضلع ہے اگر ان اور ب س د ب پر عمود ہوا ور ر ط مثلث د ب ر بیرونی دائرہ کا مماس ہو جو د ب کو بڑھائی ہوے حصہ سے ط پر ملتا ہو اور اگر د ر اور ب ر ضلعی ب س اور د ن کو س اور ن مین قطع کرتا ہو تو ثابت کرو کہ س ن ط ایک خط مین واقع ہے اور دریافت کرو کہ د ب کے نصف کے نقطہ سے اس خط پر عمود کھینچین تو اوسکی لمبائی کیا ہوگی جواب لمبائی عمود کی $= \frac{۱}{۲}\,\frac{(\text{ر}^{۲}+\text{ث}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}{(\text{ر}^{۴}-\text{ر}^{۲}\text{ث}^{۲}+\text{ث}^{۴})^{\frac{۱}{۲}}}$

(۱۲) مثلث د ت ر کا ت زاویہ قایمہ ہے تو ثابت کرو کہ $\text{کوٹ}\ \frac{۱}{۲}\text{د} = \text{ث}+\text{ر}$

(۱۳) ایک برج کے خاص دکھن ایک مقام س سے اوسکی اونچائی کا زاویہ °۳۰ ہے اور س کے خاص پچھم ایک مقام ج ہے جو س سے ب فاصلہ پر ہے اونچائی کا زاویہ °۱۵ ہے تو ثابت کرو کہ اونچائی برج کے $= \frac{\text{ث}}{(\sqrt{۲}\,(۲+۲)\ [illegible])}$

$$۱ - \text{ٹان ر} = \frac{\text{ذ سن د}}{\text{ت} - \text{ذ کوس د}}$$

$$۱ - \text{کوس}\ \frac{۱}{۲}(\text{ت}-\text{ر}) = \frac{\text{ث}+\text{ذ}}{\text{ج}}\ \text{سن}\ \frac{۱}{۲}\text{د}$$

$$\text{سن}\,(\text{ت} - \text{د}) = \frac{\text{ٹ}^{۲} - \text{ڑ}^{۲}}{\text{ڈ}^{۲}}\,\text{سن د}$$

(۳) $\frac{1}{2}(\text{ڑ}^{۲} + \text{ڈ}^{۲} + \text{ٹ}^{۲}) = \text{ٹ ڑ کوس د} + \text{ٹ ڈ کوس ر} + \text{ڑ ڈ کوس ت}$ ۔

(۴) $\frac{1}{2}(\text{ڈ} + \text{ڑ} + \text{ٹ}) = \frac{1}{2}(\text{ٹ} + \text{ڑ})\,\text{کوس د} + \frac{1}{2}(\text{ٹ} + \text{ڈ})\,\text{کوس ر}$
$+ \frac{1}{2}(\text{ڑ} + \text{ڈ})\,\text{کوس ت}$

(۵) $\text{ڈ}^{۲} = (\text{ٹ} + \text{ڑ})^{۲}\,\text{سن}^{۲}\,\frac{1}{2}\,\text{د} + (\text{ٹ} - \text{ڑ})^{۲}\,\text{کوس}^{۲}\,\frac{1}{2}\,\text{د}$

(۶) $۲\,\text{ٹ کوٹ}\,\frac{1}{2}\,\text{ت} = (\text{ڑ} + \text{ڈ} - \text{ٹ})(\text{کوٹ}\,\frac{1}{2}\,\text{ر} + \text{کوٹ}\,\frac{1}{2}\,\text{د})$

(۷) $\frac{\text{ٹ}}{\text{ڑ}}\,\text{سن}^{۲}\,\frac{1}{2}\,\text{ر} = \frac{\text{ج} - \text{ٹ}}{\text{ج} - \text{ڑ}}\,\text{سن}^{۲}\,\frac{1}{2}\,\text{ٹ}$ ۔

(۸) اگر ٹ ڑ اور ر معلوم ہو جسمیں ٹ بڑا ہو ڑ سے اور اگر ڈ ڈ مثلث کا تیسرا ضلع ہو تو

$\text{ڈ}^{۲} - ۲\,\text{ڈ ڈ کوس}\,۲\,\text{ر} + \text{ڈ}^{۲} = ۴\,\text{ٹ}^{۲}\,\text{کوس}^{۲}\,\text{ر}$

(۹) اگر زاویہ د کو ڈ ضلع کی نصف کرنے والا نقطہ سے ملا دیوین تو اس خط کی لمبائی $\frac{1}{2}$

$\left\{۲(\text{ٹ}^{۲} + \text{ڑ}^{۲}) - \text{ڈ}^{۲}\right\}^{\frac{1}{2}}$

(۱۰) $\text{سطح} = \frac{1}{2}(\text{ٹ}^{۲} - \text{ڑ}^{۲})\,\frac{\text{سن ت سن ر}}{\text{سن}\,(\text{ت} - \text{ر})}$

(۱۱) $\text{لی}\,\frac{\text{ٹ}}{\text{ڑ}} = (\text{کوس}\,۲\,\text{ٹ} - \text{کوس}\,۲\,\text{ر}) + \frac{1}{2}(\text{کوس}\,۴\,\text{ٹ} - \text{کوس}\,۴\,\text{ر}) + \frac{1}{۳}(\text{کوس}\,۶\,\text{ٹ} - \text{کوس}\,۶\,\text{ر})$ وغیرہ

(۱۲) $\text{لی}\,\frac{\text{ٹ}}{\text{ڈ}} = \frac{\text{ڑ}}{\text{ٹ}}\,\text{کوس د} + \frac{\text{ڑ}^{۲}}{۲\,\text{ٹ}^{۲}}\,\text{کوس}\,۲\,\text{د} + \frac{\text{ڑ}^{۳}}{۳\,\text{ٹ}^{۳}}\,\text{کوس}\,۳\,\text{د} + \cdots\cdots$

(۱۳) $\text{ز} = \frac{\text{ڑ}}{\text{ٹ}}\,\frac{\text{سن د}}{\text{سن}\,۱} + \frac{\text{ڑ}^{۲}}{\text{ٹ}^{۲}}\,\frac{\text{سن}\,۲\,\text{د}}{\text{سن}\,۲} + \frac{\text{ڑ}^{۳}}{۳\,\text{ٹ}^{۳}}\,\frac{\text{سن}\,۳\,\text{د}}{\text{سن}\,۳} + \cdots\cdots$

(۱۴) اگر م = $\frac{\text{ڑ — ٹ}}{\text{ڈ}}$ تو ت = کوس$^{-1}$ (۲ کوس ½ د) — ½ د اور کوٹ ½ (ر — ت) = $\frac{\text{۱ + م کوس ر}}{\text{م سن ر}}$

(۱۵) اگر زاویون کا سن سلسلہ جمع مین ہو تو اون زاویونکی نصف کی کوٹ بھی سلسلہ جمع مین ہوگا —

(۱۶) اگر کوس ت اور کوس ر اور کوس د سلسلہ جمع مین ہو تو (ج — ٹ) اور (ج — ڑ) اور (ج — ڈ) سلسلہ مین ہوگا —

(۱۷) اگر کوس ٹ = $\frac{\text{ٹ — ڑ}}{\text{ڈ}}$ تو ثابت کرو کہ کوس ½ (ت — ر) = $\frac{\text{ٹ + ڑ}}{\text{۲ ✓ٹ ر}}$ سن ½ د اور کوس ½ (ت + ر) = $\frac{\text{ڈ}}{\text{۲ ✓ت ڑ}}$ سن ½ د

(۱۸) اگر ایک مثلث مین ٹ — ڑ ڈ سے بہت چھوٹا ہو تو ت — ر کا جواب سکنڈ مین = ہوگا قریب ۲ $\frac{\text{ٹ — ڑ}}{\text{ڈ}}$ $\frac{\text{سن ر}}{\text{سن ۱}''}$ + $\left(\frac{\text{ٹ — ڑ}}{\text{ڈ}}\right)^{۲}$ $\frac{\text{سن ۲ ر}}{\text{سن ۲}''}$

(۱۹) اگر کسی مثلث کی ضلع ت اور زاویہ ت مین تبدیل نہو تو ثابت کرو کہ باقی ضلعون کی کمی و بیشی مساوات پ ڑ سک ر + پ ڈ سک د = ۰ ظاہر ہو سکتی ہے —

(۱) کسی مثلث کے ضلع ۱۳ — ۱۴ — ۵ ہین تو اوسکی سطح کیا ہوگی —

(۲) اگر کسی مثلث کے جملہ الحد و سطح اور ایک زاویہ معلوم ہو تو زاویہ معلومہ کے سامنے والا ضلع کے مقدار کیا ہوگی —

(۳) اگر ایک مثلث مین ت اور ڈ اور سطح معلوم ہو تو باقی ضلع اور زاویہ کیا ہونگی۔

(۴) اگر ایک مثلث کے چوٹی کا زاویہ اور قاعدہ پر کا عمود اور قاعدہ کے دونو ٹکڑون سے
جو سطح سگی وہ معلوم ہو تو مثلث کا ضلع اور زاویہ دریافت کرو

(۵) اگر ایک پہاڑ کے پائین سے چوٹے تک درازی $\frac{۲}{۳}$ ۱ میل ہے جسکی ارتفاع فی ۵ مین
ایک فٹ ہے تو ایک ہرہے راہ کی لمبائی جسکی فی ۱۲ مین ایک فٹ اونچائی ہے کیا ہوگی۔

(۶) ایک مثلث کی سطح اوس مثلث کی سطح کی $\frac{۳}{۴}$ حصہ ہے جسکی ضلع برابر ہین ۳ خطونکی
جو پہلے مثلث کے زاویون کو اوسکے سامنے والے ضلعونکی بیچ نقطہ کے جو خطوط ملانے
سے بنتے ہین۔

(۷) اگر ایک شے مکعب کے ۳ کنارہ پر جو ایک نقطہ جیم مین ملتی ہین ۳ نقطہ د۔ ر۔ ت لیجاوین
جس کا فاصلہ جیم سے ڈ ڑ ٹ ہے تو ثابت کرو کہ د ر ت ملانے سے وہ مثلث بنیگا جسکے
سطح = $\frac{۱}{۲}$ (ڈ۲ ڑ۲ ت۲ + ڈ۲ ٹ۲)

(۸) اگر کسی مثلث کے ضلع ن-۱ و ن و ن+۱ ہون جسمین ن کی مقدار بہت بڑی ہے
تو زاویونکو دریافت کرو اور فی زاویہ کا فرق ۲۰° سے کیا ہوگا۔

(۹) اگر ۶ فٹ اونچی کوئی شے کسی برج پر کھڑے ہو اور اوس شے کا زاویہ برج کی پائین
سے سطح افقی پر سو گز کے فاصلہ پر ٹماں ت ۱ ۰۱۰ ہو تو اونچائی برج کی کیا ہوگی

جواب $\pm \frac{۱}{۳}\sqrt{۳۰۰۰۹}$ — اگر اسمین ان دونون علامتون سے کیا مراد ہے۔

(۱۰) ۲ شے ب و ج ایک جہاز پر سے ایک خط مین نظر آئین جس خط کا جھکاو جہاز کی راہ کے ساتھ جو خاص اوتر کیطرف ہے ۱۵° کا ہے جہاز جو اسی راہ کو تبدیل کرکے اوتر پچھم کی جانب د میل چلا تو وہی دونون سے خاص پورب اور اوتر پورب کی جانب نظر آئین تو ب و ج کے درمیان کا فاصلہ دریافت کرو جواب ۵ $(۲-\sqrt{۳})$ میل

(۱۱) ایک جہاز سے دوسرے جہاز کو جو اوسکے متوازی چل رہا ہے اوتر جانب کے ساتھ زاویہ ب بناتے دیکھا بعد ن گھنٹہ چلنے کے اوسی جہاز کو اوتر سے زاویہ ج پر اور م گھنٹہ کے بعد زاویہ س پر دیکھا تو دریافت کرو کہ وہ جہاز کسطرف کو جاتے تھے جواب اگر جہازون کی راہ اوتر جانب سے زاویہ ط پر ہو تو جواب مساوات $\frac{\text{سن}(ط-س)}{\text{سن}(ط-ج)} = \frac{ن}{م} \times \frac{\text{سن}(ج-ب)}{\text{سن}(س-ج)}$ سے دریافت ہو سکتا ہے۔

(۱۲) دو دیوار ب اور بَ فٹ اونچا سطح پر واقع ہین کہ اون سے زاویہ قائمہ بنتا ہے اور اگر اونکا سایہ ساتھ ج حِ فٹ چوڑا ہو جبکہ آفتاب خاص دکھن طرف ہو پس اگر سطح افقی سے ارتفاع آفتاب ٹ ہو اور پہلے دیوار کا جھکاو اوتر دکھن خط سے ع ہو تو ثابت کرو کوٹ $ٹ = \sqrt{\frac{ح^۲}{ب^۲} + \frac{ج^۲}{بَ^۲}}$

(۱۳) ایک لڑکا دوپہر کے وقت پتنگ اوڑاتا تھا جبکہ ہوا دکھن سے زاویہ ب پر چلتی تھی

اور اوترسے پتنگ کا سایہ کا زاویہ ج تھا لیکایک ہوا بدل گئی یعنی دکن سے زاویہ پ ہوگئی اور سایہ اوترسے ج پر ہوگیا اور بلندی پتنگ کی ½ پ سے اتنی زیادہ ہوئی کہ جتنی پہلے اوس سے پست ہے اگر آفتاب کی ارتفاع کا زاویہ ط ہو اور اول مین پتنگ کا ارتفاع زاویہ ½ پ — ع ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{تان}^2\,\text{ط} = \frac{\text{سن ج سن ج}}{\text{سن (ب — ج) سن (ب+ج)}}$$

$$\text{اور تان}^2\,(\tfrac{1}{2}\,\text{پ — ع}) = \frac{\text{سن (ب — ج) سن ج}}{\text{سن (ب+ج) سن ج}}$$

(۱۴) — قزاقون نے ایک سوداگر کے جہاز کو بندرگاہ سے چھوڑتے ہوئے دیکھا کہ جسکا فاصلہ معلوم ہے اور جانب روانی جہاز کے دریافت کی اور دونون جہازونکی چلنے کا حساب معلوم ہو تو دریافت کرو کہ قزاق کس جانب کو اپنا جہاز چلاوین گے تاکہ وہ اوسکی لوٹنے کو مستعد ہون جبکہ وہ جہاز ایک گولہ رد کے فاصلہ مین ہو۔

(۱۵) دو شہر ایک دوسری کی اوتر دکن جانب کو واقع ہین کہ جنکا درمیانی فاصلہ ۱ ½ میل ہے ایک بلون سے اونکا زاویہ پستی ۴۵° اور ۶۰° کا نظر آیا جب بلون خط افقی مین دکن پورب کی جانب چھہ میل پر گیا تو اون شہرون کا زاویہ پستی بہ نسبت پہلے کے نصف ہوگیا تو ثابت کرو کہ بلندی بلون کی قریب ۳ میل کے تھی۔

(۱۶) اگر کسی مثلث کا ایک زاویہ ۶۰° کا ہو اور جن دو ضلعون سے وہ بنتے اون مین باہمدیگر وہ نسبت ہو جو ۱۹ کو ا سے ہے تو ثابت کرو کہ باقی دونون اونکا زاویہ ۱۱° ۱۹ گیارہ سکنڈ

اور دوسرا زاویہ ۲° ۸' ۴۹" ۔ ہوگی —

ل$_{۱۰}$۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ء۰ اور ل ٹان ۷۵° ۱۹' ۱۱" = ۱۰ء۱۹۴۰۰۳۴۰

(۱۷) اگر ڈورڈٹ ضلع ۳ و ۵ و ۶ ہوں تو زاویہ ت کو دریافت کرو ل$_{۱۰}$۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ء

ل$_{۱۰}$۵ = ۶۹۸۹۷۰۰ء ل کوس ۲۴° ۵' ۳۰" = ۹ء۹۶۰۴۳۴۰ ل کوس ۲۶° ۵' ۴۵" = ۹ء۹۵۳۴۳۷۱

(۱۸) اگر کسی مثلث کے دو ضلعوں میں وہ نسبت ہو جو نو کو ۷ سے ہے اور زاویہ درمیانی ۶۴° ۱۲' کا ہو تو باقی زاویوں کو دریافت کرو ل$_{۱۰}$۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ء ل ٹان ۵۷° ۵۴' = ۱۰ء۲۰۲۵۴۵۵

ل ٹان ۱۱° ۱۲' = ۹ء۲۹۶۹۲۳۴ ل ٹان ۱۱° ۱۳' = ۹ء۲۹۹۹۴۰۴

(۱۹) دوپہر کیوقت ایک اونچی جگہہ سے جو سمندر کی سطح سے ج فٹ بلندی پر ہے ایک شخص نے دریافت کیا کہ ابر کی اونچائی کا زاویہ ب اور پانی پر اوس کے سایہ کے زاویہ پستی مین ہے اگر دریافت کے وقت آفتاب کی اونچائی کا زاویہ د ہو تو سمندر کی سطح سے ابر کی اونچائی = ج $\frac{\text{سن د سن (ب + س)}}{\text{سن س سن (د + ب)}}$

(۲۰) دوپہر کیوقت ایک بیلون کی اونچائی ۳ جگہہ ا ب ج سے دریافت ہوا کہ ۴۵° اور ۶۰° اور ۴۵° ہے اگر ا اور ب مقام ج سے پچھم اور اوتر کی جانب ہوں تو اونچائی بیلون کے اور مقام سایہ کا دریافت کرو جواب اگر ا ج = ج اور ب ج = ک تو اونچائی

$$= \frac{۲\,ج\,ک}{ج^۲+ک^۲}\left[۱ \mp ج\left\{۱-\left(\frac{ج^۲+ک^۲}{۲\,ج\,ک}\right)^۲\right\}^{\frac{۱}{۲}}\right]$$

تمثیلات

اگر دو زاویونکا فرق ۱۰° ہو اور اونکا مجموعہ ۴۵° ہو تو ہر ایک زاویہ کتنا ہوگا—

جواب ۱۵° اور ۴۷°

سوال ۲— $\frac{۲}{۳}$ زاویہ قایمہ کو ایسی دو حصونمین تقسیم کرو کہ ایک حصہ کے ڈگری سے دوسرے حصہ کے گریڈسے وہ نسبت ہو جو کہ ۳ اور ۱۰ مین ہے— جواب ۱۵° اور ۴۵°

سوال ۳— نصف زاویہ قایمہ کو ایسے دو حصونمین تقسیم کرو کہ ایک حصہ کے ڈگری سے دوسری حصہ کے گریڈ سے وہ نسبت ہو جو کہ ۹ اور ۵ مین ہے— جواب ۳° اور ۱۵°

سوال ۴— ۱ ۵ کا مقدار ڈگری کے کسور اعشاریہ مین نکالو— جواب ۴۵° ۰۰۹ ،

سوال ۵— ن° کے زاویہ کو ایسے دو حصون مین تقسیم کرو کہ ایک مین اوس قدر انگریزی منٹ ہون جس قدر کہ دوسرے مین فرانسیسی ہون— جواب $\frac{\text{۵۰ن}}{\text{۷۷}}$ اور $\frac{\text{۲۷ن}}{\text{۷۷}}$

سوال ۶— اگر ایک ثلث $\frac{۱}{۳}$ زاویہ قائمہ کو زاویہ کے اکائی مقرر کرین تو تبلاؤ کہ ۷۵° ڈگری مین کتنی عدد نکلین گے— جواب ۲ $\frac{۱}{۲}$

سوال ۷— تبلاؤ کہ زاویہ کی اکائی مین کتنے عدد ڈگری کے ہونگے اگرچہ ۶۶ $\frac{۲}{۳}$ گ کا زاویہ ۲۰ ہو— جواب ۳°

سوال ۸- دو کثیر الاضلاع متساوی الخطوط کہ جنکی ضلعون مین وہ نسبت ہے جو کہ ۲ کو ۳ کے ساتھ ہے اور ایک کے فی زاویہ مین اوتنی ہی گریڈ ہین جتنی دوسرے مین ڈگری ہین تو تبلاؤ کہ وے زاویہ کتنے ہین۔ جواب ایک کثیر الاضلاع متساوی الخطوط مین ۸ ضلع اور دوسری مین ۱۲ ہین پس پہلے مین فی زاویہ برابر کا $\frac{۳}{۲}$ قایمہ کے اور دوسرے کا زاویہ $\frac{۵}{۳}$ قایمہ

سوال ۹- اگرچہ ایک زاویہ مین اتنی انگریزی سکنڈ ہون جتنی کہ دوسرے زاویہ مین فرنچ منٹ ہین تو اون دونون زاویون مین کیا نسبت ہوگی- جواب جو نسبت کہ ۵ کو ۱۶۲ سے ہے

تمثیلات

اگر کسی زوایہ کا سن $\frac{۳}{۵}$ تو اوسکا کوس ٹان وغیرہ نکالو-

سوال ۲- اگر کسی زاویہ کا ٹان $\frac{۴}{۳}$ ہو تو اوسکا کوس ٹان سک وغیرہ کیا ہوگا-

سوال ۳- اگر کسی زاویہ کا کوس $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ ہو تو اوسکا کوس ٹان سک وغیرہ کیا ہوگا

سوال ۴- ثابت کرو کہ سن^{۲} ﻻ ٹان ﻻ + کوس^{۲} ﻻ کوٹ ﻻ + ۲ سن ﻻ کوس ﻻ = ٹان ﻻ + کوٹ ﻻ

سوال ۵- ثابت کرو کہ ۲ (سن^{۶} ﻻ + کوس^{۶} ﻻ) − ۳ (سن^{۴} ﻻ + کوس^{۴} ﻻ) + ۱ =

مساوات ذیل کو حل کرو

سوال ۶۔ $\text{سن}^{۲}$ ہ = $\frac{۳}{۲}$ کوس ہ — جواب ہ = $\frac{\text{پ}}{۳}$

سوال ۷۔ سن ہ + کوس ہ = ۱ — جواب ہ = ۰ یا $\frac{\text{پ}}{۲}$

سوال ۸۔ کوٹ ہ = ۲ کوس ہ — جواب ہ = $\frac{\text{پ}}{۶}$ یا $\frac{\text{پ}}{۲}$

سوال ۹۔ $\text{سن}^{۲}$ ہ − ۲ کوس ہ + $\frac{۱}{۴}$ = ۰ — جواب ہ = $\frac{\text{پ}}{۳}$

سوال ۱۰۔ ۳ $\text{سک}^{۴}$ ہ + ۸ = ۱۰ سک ہ — جواب ہ = $\frac{\text{پ}}{۶}$ یا $\frac{\text{پ}}{۴}$

سوال ۱۱۔ فرض کرو کہ سن (آ − ب) = $\frac{۱}{۲}$ اور کوس (آ + ب) = $\frac{۱}{۲}$ تو آ اور ب نکالو۔ — جواب آ = ۵۱° اور ب = ۴۵°

۱— ۵۸۵°، ۶۹۰° ۹۳۰° ۶۴۲۰° ان سب زاویونکی سن کوس وغیرہ کا حاصل بتلاؤ

۲— صفر اور ۹۰۰° کے درمیان وہ کونسی زاویہ ہین کہ جس سے مساوات ذیل ثابت ہو

ٹان ہ = ۱

$\text{کوس}^{۲}$ ہ = $\frac{۱}{۲}$

۳— ورسن $\frac{\text{ن پ}}{۴}$ کا حاصل کیا ہوگا جبکہ ن ایکعدد صحیح ہے

۴— سن $\left\{\frac{\text{ن پ}}{۲} + (-۱)^{\text{ن}}\frac{\text{پ}}{۶}\right\}$ کا حاصل کیا ہوگا جبکہ یون کوئی عدد صحیح ہو۔

۵۔ سن^{۳} ہ + کوس^{۳} ہ = ۰ اس مساوات کو حل کرو

۶۔ ۲ سن^{۲} ہ − ۵ کوس ہ − ۴ = ۰ بشرح صدر

۷۔ تبدیلات علامت اور حاصل کوس ہ − سن ہ کا کیا ہوگا جبکہ زاویہ ہ صفر سے دو پ تک بڑھتا جاوے۔

۸۔ اور اسیطرح اسکا یہی کوس^{۲} ہ − سن^{۲} ہ اور ٹان ہ − کوٹ ہ کا بشرح صدر بتلاؤ

۹ سک^{۲} ہ = $\frac{۴\,\text{ا}\,\text{ب}}{(\text{ا} + \text{ب})^{۲}}$ یہ مساوات ممکن ہے یا نہیں۔

ان مساواتوں میں ہ کتنے کی برابر ہے تمام جواب بتلاؤ

۱	ٹان ہ = ۱	جواب ن پ + $\frac{\text{پ}}{۴}$
۲	سن ہ = ۱	جواب (۲ ن + $\frac{۱}{۲}$) پ
۳	کوس ہ = ۱	جواب ۲ ن پ
۴	کوس ہ = − $\frac{۱}{۲}$	جواب ۲ ن پ ± $\frac{۲\,\text{پ}}{۳}$
۵	سن^{۲} ہ = سن^{۲} ط	جواب ن پ ± ط
۶	کوسک ہ = $\frac{۲}{۳}$	جواب ن پ ± $\frac{\text{پ}}{۳}$
۷	کوس^{۲} ہ = کوس ط	جواب ن پ ± ط
۸	سک^{۲} ہ = ۲	جواب ن پ ± $\frac{\text{پ}}{۴}$

۹ ٹان^{۲} ه = ٹان^{۲} ط جواب ن پ ± ط

۱۰ ٹان^{۲} ه = $\frac{۱}{۳}$ جواب ن پ ± $\frac{\text{پ}}{۶}$

۱۱ سن ه = − $\frac{۱}{۲}$ اور کوس ه = − $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ جواب ۲ ن پ + $\frac{۷\,\text{پ}}{۶}$

۱۲ ثابت کرو کہ جتنے زاویہ کہ جنکا سن اور کوسن وہی ہے جو ط کا ہے وہ ۲ ن پ + ط مین شامل ہین

ان مساواتونکو حل کرو

۱ $\frac{\text{کوس آ} + \text{سن آ}}{\text{کوس آ} - \text{سن آ}}$ = ٹان ۲ آ + سک ۲ آ

۲ ۲ سن^{۲} آ سن^{۲} ب + ۲ کوس^{۲} آ کوس ب = ۱ + کوس ۲ آ کوس ۲ ب

۳ ٹان (۴۵° + آ) − ٹان (۴۵° − آ) = ۲ ٹان ۲ آ

۴ سن ۳ آ کوسک آ − کوس ۳ آ سک آ = ۲

۵ ۳ سن آ − سن ۳ آ = ۴ سن آ (۱ − کوس ۲ آ)

۶ $\frac{\text{سن آ} + ۲\ \text{سن ۳ آ} + \text{سن ۵ آ}}{\text{سن ۳ آ} + ۲\ \text{سن ۵ آ} + \text{سن ۷ آ}} = \frac{\text{سن ۳ آ}}{\text{سن ۵ آ}}$

۷ $\frac{\text{سن ب}}{\text{سن آ}} = \frac{\text{سن (۲ آ + ب)}}{\text{سن آ}}$ − ۲ کوس (آ + ب)

۸ سن ۴ آ = ۴ سن آ کوس^{۳} آ − ۴ کوس آ سن^{۳} آ

۹ $\frac{\text{کوس آ} - \text{کوس ۳ آ}}{\text{سن ۳ آ} - \text{سن آ}}$ = ٹان ۲ آ

۱۰ $\frac{\text{کوس ۲ آ − کوس ۴ آ}}{\text{سن ۴ آ − سن ۲ آ}}$ = ٹان ۳ آ

۱۱ کوسک ۲ آ + کوٹ ۴ آ = کوٹ آ − کوسک ۴ آ

۱۲ کوس^{۲} (آ — پ) + کوس^{۲} ب − ۲ کوس (آ − ب) کوس آ کوس ب = سن^{۲} آ

۱۳ سن^{۲} (آ − ب) + سن^{۲} ب + ۲ سن (آ − ب) سن ب کوس آ = سن^{۲} آ

۱۴ $\frac{\text{۱ − ٹان}^{۲}\text{ (۴۵° — آ)}}{\text{۱ + ٹان}^{۲}\text{ (۴۵° — آ)}}$ = سن ۲ آ

۱۵ $\frac{\text{۴ ٹان آ (۱ − ٹان}^{۲}\text{ آ)}}{\text{(۱ + ٹان}^{۲}\text{ آ)}^{۲}}$ = سن ۴ آ

۱۶ سن آ (۱ + ٹان آ) + کوس آ (۱ + کوٹ آ) = سک آ + کوسک آ

۱۷ $\frac{\text{سن ۳ آ + کوس ۳ آ}}{\text{سن ۳ آ — کوس ۳ آ}} = \frac{\text{۱ + ۲ سن ۲ آ}}{\text{۱ − ۲ سن ۲ آ}}$ × ٹان (آ − ۴۵°)

۱۸ کوس آ + کوس (۱۲۰° — آ) + کوس (۱۲۰° + آ) = ۰

۱۹ ۴ سن آ سن (۶۰° — آ) سن (۶۰° + آ) = سن ۳ آ

۲۰ ۴ کوس آ کوس (۱۲۰° — آ) کوس (۱۲۰° + آ) = کوس ۳ آ

۲۱ سن ۳ آ سن^{۳} آ + کوس ۳ آ کوس^{۳} آ = کوس^{۳} ۲ آ

۲۲ کوس^{۳} آ $\frac{\text{سن ۳ آ}}{۳}$ + سن^{۳} آ $\frac{\text{کوس ۳ آ}}{۳}$ = $\frac{\text{سن ۴ آ}}{۴}$

۲۳ کوس ن آ کوس (ن + ۲) آ — کوس^{۲} (ن + ۱) آ + سن^{۲} آ = ۰

۲۴ ٹان ن آ = (سن آ ± سن ن آ + سن (۲ن − ۱) آ) / (کوس آ ± کوس ن آ + کوس (۲ن − ۱) آ)

۲۵ سن ن آ کوسک^ن آ سک آ − کوس ن آ سک^ن آ کوسک آ

= ۲ سن (ن − ۱) آ کوسک^ن ۲ آ

۲۶ کوس ۱۰ آ + کوس ۸ آ + ۳ کوس ۴ آ + ۳ کوس ۲ آ = ۸ کوس آ کوس^۳ ۳ آ

۲۷ کوٹ آ + کوٹ ۲ آ + کوٹ ۴ آ = کوسک ۴ آ (۲ + ۲ کوس ۲ آ + ۳ کوس ۴ آ)

۲۸ کوسک آ = (۲ سن ۲ آ + ۲ کوس ۲ آ) / (کوس آ − سن آ − کوس ۳ آ + سن ۳ آ)

۲۹ کوس^۲ ۲ آ = (کوس^۳ آ − سن^۳ آ)^۲ + ۲ کوس آ سن ۳ آ (کوس آ − سن آ)^۲

۳۰ کوس^۶ آ − سن^۶ آ = کوس ۲ آ (۱ − ۱/۴ سن^۲ ۲ آ)

مساوات ذیل کو حل کرو

۳۱ ٹان (ط/۴ − لا) + کوٹ (ط/۴ − لا) = ۴

۳۲ سن ۴ لا + سن لا = ۰

۳۳ سن ۷ لا − سن لا = سن ۳ لا

۳۴ سن لا + کوس لا = ۱/√۲

۳۵ سن ۵ لا = ۱۶ سن^۵ لا

۳۶ کوس ۳ ط + کوس ۲ ط + کوس ط = ۰

۳۷ سن ۳ ط + سن ۲ ط + سن ط = ۰

۳۸ ٹان ط + ٹان $\left(\frac{\pi}{۴} + \text{ط}\right)$ = ۲

۳۹ ٹان ۲ ط = ۸ کوس^{۲} ط − کوٹ ط

۴۰ ٹان $\left(\frac{\pi}{۴} + \text{ط}\right)$ = ۳ ٹان $\left(\frac{\pi}{۴} - \text{ط}\right)$

۱ جبکہ آ ۴۵۰° اور ۶۳۰° کے درمیان ہو تو ثابت کرو کہ ۲ سن $\frac{\text{آ}}{۲}$ = $-\sqrt{\text{۱ + سن آ}} - \sqrt{\text{۱ − سن آ}}$

۲ اگر $\frac{\text{آ}}{۲}$ زاویہ ۴۰۵° اور ۴۹۵° کے درمیان ہو تو کوس $\frac{\text{آ}}{۲}$ کو بنام سن آ کی نکالو

۳ جب $\frac{\text{آ}}{۲}$ −۴۵° اور −۱۳۵° کے درمیان ہو تو سن $\frac{\text{آ}}{۲}$ کو بنام سن آ کے نکالو

۴ اگر ۲ سن آ = $-\sqrt{\text{۱ + سن ۲ آ}} + \sqrt{\text{۱ − سن ۲ آ}}$ اور دو کوس آ = ہو $-\sqrt{\text{۱ + سن ۲ آ}}$
$-\sqrt{\text{۱ − سن ۲ آ}}$ تو بتلاؤ کہ آ کتنے ڈگریوں کے درمیان ہوگا

۵ بتلاؤ کہ آ کتنے ڈگریوں کے درمیان ہونے سے ۲ سن آ = ہو
$\sqrt{\text{۱ + سن ۲ آ}} - \sqrt{\text{۱ − سن ۲ آ}}$ کے ہو

۶ بتلاؤ کہ آ کتنے ڈگریوں کے درمیان ہو کہ دو کوس آ = ہو −
$\sqrt{\text{۱ + سن ۲ آ}} + \sqrt{\text{۱ − سن ۲ آ}}$ کے ہو

۷ ایک دی ہوئی زاویہ کو ایسے دو حصونین تقسیم کہ کرو کہ جنکی سن مین ایک

دی ہوئی نسبت ہو۔

۸ ایک دی ہوئی زاویہ کو ایسے دو حصون مین تقسیم کرو کہ جنکے کوسن مین ایک دی ہوئی نسبت ہو۔

۹ ایک دی ہوئی زاویہ کو ایسے دو حصون مین تقسیم کرو کہ جنکے ٹان مین ایک دی ہوئی نسبت ہو

۱۰ فرض کرو کہ ٹان $\frac{آ}{۲}$ = ۲ − $\sqrt{۳}$ ۔ تو سن آ نکالو

۱۱ فرض کرو کہ سن ۱۰ ۴ = − $\frac{۱}{۲}$ تو کوسن °۱۰ نکالو

۱۲ فرض کرو ٹان ۲آ = − $\frac{۲۴}{۷}$ تو سن آ اور کوس آ نکالو

۱۳ ٹان °۱۶۵ کو ٹان °۳۰ کے قیمت معلومہ سے نکالو

۱۴ ثابت کرو ٹان^۲ $\frac{آ}{۲}$ = $\frac{\text{۲ سن آ − سن ۲آ}}{\text{۲ سن آ + سن ۲آ}}$

۱۵ ورس (°۱۸۰ − آ) = ۴ ورس $\frac{۱}{۲}$ (°۱۸۰ + آ) ورس $\frac{۱}{۲}$ (°۱۸۰ − آ)

۱۶ (کوس آ + کوس ب)^۲ + (سن آ + سن ب)^۲ = ۴ کوس^۲ $\frac{۱}{۲}$ (آ − ب)

۱۷ (کوس آ − کوس ب)^۲ + (سن آ − سن ب)^۲ = ۴ سن^۲ $\frac{۱}{۲}$ (آ − ب)

۱۸ ثابت کرو کہ سن °۲۲ $\frac{۱}{۲}$ = $\frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}{۲}$ ، کوس °۲۲ $\frac{۱}{۲}$ = $\frac{\sqrt{۲ + \sqrt{۲}}}{۲}$

اور ٹان ۲۲ $\frac{۱}{۲}$ = $\sqrt{۲}$ − ۱

۱۹ (ٹان آ + کوٹ آ) ۲ ٹان $\frac{آ}{۲}$ (۱ − ٹان^۲ $\frac{آ}{۲}$) = (۱ + ٹان^۲ $\frac{آ}{۲}$)^۲

۲۰ ٹان۲ $\left(\frac{\text{پ}}{۴} + \frac{\text{آ}}{۲}\right) = \frac{\text{سک آ + ٹان آ}}{\text{سک آ − ٹان آ}}$

۲۱ سس ا $\left(\frac{\text{پ}}{۴} - \frac{\text{ک}}{۲}\right)$ + کوس $\left(\frac{\text{پ}}{۴} - \frac{\text{ک}}{۲}\right)$ $\frac{\text{سن ک}}{\sqrt{۲}\,(\text{ورس ک})}$

۲۲ $\sqrt{(۱ + \text{سن ک})}$ = ۱ + ۲ سن $\frac{\text{ک}}{۴}$ $\sqrt{(۱ - \text{سن } \frac{\text{ک}}{۲})}$

۲۳ کوس۴ $\frac{\text{پ}}{۸}$ + کوس۴ $\frac{۳\text{پ}}{۸}$ + کوس۴ $\frac{۵\text{پ}}{۸}$ + کوس۴ $\frac{۷\text{پ}}{۸}$ = $\frac{۳}{۲}$

۲۴ ٹان ۷ $\frac{۱}{۲}^{\circ}$ = $\frac{\sqrt{۲} - ۱}{\sqrt{۳} + \sqrt{۲}}$

۲۵ ٹان ۱۴۲ $\frac{۱}{۲}^{\circ}$ = ۲ + $\sqrt{۲}$ − $\sqrt{۳}$ − $\sqrt{۶}$

۲۶ اگر ٹان لا = (۲ + $\sqrt{۳}$) ٹان $\frac{\text{لا}}{۲}$ تو لا کی قیمت نکالو

۲۷ اگر ط = (ن + $\frac{۱}{۴}$ ± $\frac{۱}{۴}$) پ تو ٹان ط + کوٹ ط نکالو

۲۸ اگر $\bar{\text{ط}}$ = $\frac{\text{پ}}{۱۷}$ تو $\frac{\text{کوس ط کوس ۱۳ ط}}{\text{کوس ۳ط + کوس ۵ ط}}$ کے قیمت نکالو

۲۹ اگر سک (ع + ط) + سک (ع − ط) = ۲ سک ع کے تو ثابت کرو

کہ کوس ع = $\sqrt{۲}$ کوس $\frac{\text{ط}}{۲}$

۳۰ اگر ٹان $\frac{\text{ک}}{۲}$ = $\left(\frac{۱ + \text{س}}{۱ - \text{س}}\right)^{\frac{۱}{۲}}$ ٹان $\frac{\text{ع}}{۲}$ تو ثابت کرو کوس ک برابر ہے $\frac{\text{کوس ع − س}}{\text{۱ − س کوس ع}}$

تمثیلات ذیل کے قاعدون کو ثابت کرو

۱ کوس $\frac{(\text{ا + ب + ج})}{\text{کوس ا کوس ب کوس ج}}$ = ۱ − ٹان ـ ٹان ج − ٹان ج ٹان ا − ٹان ا ٹان ب

۲ $\frac{\text{سن (ا + ب + ج)}}{\text{کوس آ کوس ب کوس ج}}$ = ٹان آ + ٹان ج − ٹان ا ٹان ب ٹان ج + ٹان ب

۳ سن (آ - ب) + س (ب - ی) + س (ی - آ) + ۴ س
(آ - ب)/۲ سن (ب - ی)/۲ سن (ی - آ)/۲ = ۰

۴ ۴ سن (ہ - ط) سن (م ہ - ط) کوس (ہ - م ط) = ۱ + کوس
(۲ ہ - ۲ م ہ) - کوس (۲ ہ - ۲ ط) - کوس (۲ م ہ - ۲ ط)

۵ سن (ا + ب) کوس ب - سن (ا + ج) کوس ج = سن (ب - ج)

۶ کوس (ا + ب + ج) + کوس (ا + ب - ج) + کوس (ا + ج - ب)
+ کوس (ب + ج - ا) = ۴ کوس آ کوس ب کوس ج

۷ کوس ۲آ + کوس ۲ب + کوس ۲ج = ۴ کوس (ا + ب)
× کوس (ب + ج) کوس (ج + ا) - کوس ۲ (ا + ب + ج)

۸ سن آ / (سن (آ - ب) سن (آ - ج)) + سن ب / (سن (ب - ج) سن (ب - آ)) + سن ج / (سن (ج - آ) سن (ج - ب)) = ۰

۹ کوس (ا + ب) سن ب - کوس (ا + ج) سن ج =
سن (ا + ب) کوس ب - سن (ا + ج) کوس ج

۱۰ سن (ا + ب - ۲ج) کوس ب - سن (ا + ج - ۲ب) کوس ج =
سن (ب - ج) [کوس (ب + ج - ا) + کوس (ا + ج - ب) + کوس (ا + ب - ج)]

١١ سن (ا + ب + ج) سن ب = سن (ا + ب) سن (ب + ج) ـ سن آ سن ج

١٢ سن آ سن ب سن (ب - ا) + سن ب سن ج سن (ج - ب)
+ سن ج سن آ سن (آ - ج) + سن (ب - ا) سن (ج - ب) سن (ا - ج) = ٠

١٣ کوس (ا + ب) سن (ا - ب) + کوس (ب + ج) سن (ب - ج)
+ کوس (ج + د) سن (ج - د) + کوس (د + آ) سن (د - آ) = ٠

١٤ سن (د - ب) سن (آ - ج) + سن (ب - ج) سن (آ - د)
+ سن (ج - د) سن (ا - ب) = ٠

اگر آ + ب + ج = ١٨٠° تو ثابت کرو کہ مساوات ١٥ سے ٣٠ تک صحیح ہین

١٥ کوٹ $\frac{آ}{۲}$ + کوٹ $\frac{ب}{۲}$ + کوٹ $\frac{ج}{۲}$ = کوٹ $\frac{آ}{۲}$ کوٹ $\frac{ب}{۲}$ کوٹ $\frac{ج}{۲}$

١٦ سن ا + سن ب + سن ج = ۴ کوس $\frac{آ}{۲}$ کوس $\frac{ب}{۲}$ کوس $\frac{ج}{۲}$

١٧ سن آ ـ سن ب + سن ج = ۴ سن $\frac{آ}{۲}$ کوس $\frac{ب}{۲}$ سن $\frac{ج}{۲}$

١٨ کوس ۲آ + کوس ۲ب + کوس ۲ج + ۴ کوس آ کوس ب کوس ج + ١ = ٠

١٩ کوس ۴آ + کوس ۴ب + کوس ۴ج + ١ = ۴ کوس ۲آ کوس ۲ب کوس ۲ج

٢٠ کوس $\frac{آ}{۲}$ + کوس $\frac{ب}{۲}$ + $\frac{ج}{۲}$ = ۴ کوس $\frac{پ - ا}{۴}$ کوس $\frac{پ - ب}{۴}$ کوس $\frac{پ - ج}{۴}$

٢١ کوس $\frac{آ}{۲}$ ـ کوس $\frac{ب}{۲}$ + کوس $\frac{ج}{۲}$ = ۴ کوس $\frac{پ + ا}{۴}$ کوس $\frac{پ - ب}{۴}$ کوس $\frac{پ + ج}{۴}$

۲۲ $\text{سن}\,\frac{\text{آ}}{\text{۲}} + \text{سن}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}} + \text{سن}\,\frac{\text{ج}}{\text{۲}} - \text{۱} = \text{۴ سن}\,\frac{\text{پ} - \text{آ}}{\text{۴}}\;\text{سن}\,\frac{\text{پ} - \text{ب}}{\text{۴}}$

$\text{سن}\,\frac{\text{پ} - \text{ج}}{\text{۴}}$

۲۳ $\text{سن}^{\text{۲}}\,\text{آ} + \text{سن}^{\text{۲}}\,\text{ب} + \text{سن}^{\text{۲}}\,\text{ج} - \text{۲ کوس آ کوس ب کوس ج} = \text{۲}$

۲۴ $\text{سن}^{\text{۲}}\,\text{۲آ} + \text{سن}^{\text{۲}}\,\text{۲ب} + \text{سن}^{\text{۲}}\,\text{۲ج} + \text{۲ کوس ۲آ کوس ۲ب کوس ۲ج} = \text{۲}$

۲۵ $\text{ٹان}\,\frac{\text{آ}}{\text{۲}}\,\text{ٹان}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}} + \text{ٹان}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\,\text{ٹان}\,\frac{\text{ج}}{\text{۲}} + \text{ٹان}\,\frac{\text{ج}}{\text{۲}}\,\text{ٹان}\,\frac{\text{آ}}{\text{۲}} = \text{۱}$

۲۶ $\frac{\text{سن آ} + \text{سن ب} - \text{سن ج}}{\text{سن آ} + \text{سن ب} + \text{سن ج}} = \text{ٹان}\,\frac{\text{آ}}{\text{۲}}\,\text{ٹان}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}}$

۲۷ $\text{۱} + \text{کوس آ کوس ب کوس ج} = \text{کوس آ سن ب سن ج}$

$+ \text{کوس ب سن آ سن ج} + \text{کوس ج سن آ سن ب}$

۲۸ $\text{کوٹ آ} + \text{کوٹ ب} + \text{کوٹ ج} = \text{کوٹ آ کوٹ ب کوٹ ج} +$

۲۹ $\text{سن}^{\text{۲}}\,\frac{\text{ج}}{\text{۲}} = \frac{(\text{سن ب} + \text{سن ج} - \text{سن آ})\;(\text{سن ج} + \text{سن آ} - \text{سن ب})}{\text{۴ سن آ سن ب}}$

۳۱ $\frac{\text{ٹان آ} + \text{ٹان ب} + \text{ٹان ج}}{\text{۲}(\text{سن آ} + \text{سن ب} + \text{سن ج})} = \frac{\text{ٹان}\,\frac{\text{آ}}{\text{۲}}\,\text{ٹان}\,\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\,\text{ٹان}\,\frac{\text{ج}}{\text{۲}}}{\text{۲ کوس آ کوس ب کوس ج}}$

۳۲ $\text{سن ن آ} + \text{سن ن ب} + \text{سن ن ج} = \text{۴ سن}\,\frac{\text{ن پ}}{\text{۲}}\;\text{کوس}\,\frac{\text{ن آ}}{\text{۲}}\;\text{کوس}\,\frac{\text{ن ب}}{\text{۲}}$

$\text{کوس}\,\frac{\text{ن ج}}{\text{۲}}$ اگر ن ایک صحیح عدد ۴ م + ۱ یا ۴ م + ۳ کے صورت کا ہوگا۔

۳۳ $\text{سن ن آ} + \text{سن ن ب} + \text{سن ن ج} = -\text{۴ کوس}\,\frac{\text{ن پ}}{\text{۲}}\;\text{سن}\,\frac{\text{ن آ}}{\text{۲}}\;\text{سن}\,\frac{\text{ن ب}}{\text{۲}}$

سن $\frac{\text{ن ج}}{۲}$ اگر ن ایک صحیح عدد ۴م یا ۴م + ۲ کی صورت کا ہوگا۔

۳۴۔ کوس $\frac{\text{ا}}{۲}$ کوس $\frac{\text{ب}}{۲}$ کوس $\frac{\text{ج}}{۲}$ = ۴ کوس $\frac{\text{ب + ج}}{۴}$ کوس $\frac{\text{آ + ج}}{۴}$ کوس $\frac{\text{آ + ب}}{۴}$

۳۵۔ $\frac{\text{ٹان آ}}{\text{ٹان ب}} + \frac{\text{ٹان ب}}{\text{ٹان ج}} + \frac{\text{ٹان ج}}{\text{ٹان آ}} + \frac{\text{ٹان آ}}{\text{ٹان ج}} + \frac{\text{ٹان ب}}{\text{ٹان ا}} + \frac{\text{ٹان + ج}}{\text{ٹان ب}} =$ سک آ سک ب سک ج − ۲

۳۶۔ اگر چار زاویوں کا مجموعہ = ۲ قائمہ کی تو اونکی ٹنجنٹ کا حاصل = برابر ہوگا اونکی ٹنجنٹ کی حاصل ضرب کی مجموعہ سے اگر تین تین کرکے اکٹھا لیے جاوے۔

۳۷۔ اگر ٹان . $\frac{\text{(ا − ب)}}{\text{ٹان آ}} + \frac{\text{سن ج}}{\text{سن آ}}$ = برابر ہو ایک عدد کے تو ثابت کرو کہ ٹان آ ٹان ب = ٹان۲ ج

۳۸ اگر $\frac{\text{ٹان}^{۲}\text{ آ}}{\text{ٹان}^{۲}\text{ ب}} = \frac{\text{کوس ب (کوس لا − کوس آ)}}{\text{کوس آ (کوس لا − کوس ب)}}$ تو ثابت کرو کہ ٹان۲ $\frac{\text{ہ}}{۲}$ = ٹان $\frac{\text{ا}}{۲}$ ٹان $\frac{\text{ب}}{۲}$

۳۹ اگر کوس۲ ہ برابر ہو $\frac{\text{کوس آ}}{\text{کوس ب}}$ اور کوس۲ ہ برابر ہو کوس $\frac{\text{آ}}{\text{کوس ب}}$ اور $\frac{\text{ٹان ہ}}{\text{ٹان ہ}} = \frac{\text{ٹان آ}}{\text{ٹان آ}}$ تو ثابت کرو کہ ٹان۲ $\frac{\text{ا}}{۲}$ ٹان۲ $\frac{\text{اَ}}{۲}$ = ٹان $\frac{\text{ب}}{۲}$

۴۰ اگر کوس آ = کوس ب کوس ع = ہو کوس بَ کوس عَ اور سن = ۲ سن $\frac{\text{ع}}{۲}$ سن $\frac{\text{عَ}}{۲}$ تو ثابت کرو کہ ٹان۲ $\frac{\text{آ}}{۲}$ = ٹان۲ $\frac{\text{ب}}{۲}$ ٹان۲ $\frac{\text{بَ}}{۲}$

۴۱ - اگر اوپر سن $\frac{\text{(ا − ب)}}{\text{سن ب}}$ برابر ہو اوپر سن $\frac{\text{ا + ہ}}{\text{سن ہ}}$ تو ثابت کرو کہ کوٹ ب − کوٹ ا = کوٹ (ا + ہ) + کوٹ (ا − ب)

۴۲ اگر $\left(\frac{\text{ٹان آ}}{\text{ٹان ک}} - \frac{\text{ٹان ب}}{\text{ٹان ک}}\right)^۲ = \text{ٹان}^۲\text{ آ} - \text{ٹان}^۲\text{ ب}$ تو $\text{کوس ک} = \frac{\text{ٹان ب}}{\text{ٹان آ}}$

۴۳ اگر $\text{ٹان ع} = \text{کوس ک ٹان آ}$ اور $\text{ٹان ا}' = \text{ٹان ک سن ع}$ تو ثابت کرو کہ

$\text{ٹان}^۲\frac{\text{ع}}{۲}$ کا ایک جواب $\text{ٹان}\frac{\text{آ} + \text{ا}'}{۲}\text{ ٹان}\frac{\text{آ} - \text{ا}'}{۲}$

۴۴ اگر $۱ - \text{کوس}^۲\text{ ا} - \text{کوس}^۲\text{ ب} - \text{کوس}^۲\text{ ج} + ۲\text{ کوس ا کوس ب کوس ج} = ۰$

تو آ ب ج زاویونکی درمیانمین کیا نسبت ہوگی۔

$۱ - \text{کوس}^۲\text{ ا} - \text{کوس}^۲\text{ ب} - \text{کوس}^۲\text{ ح} + ۲\text{ کوس ا کوس ب کوس ح} = ۰$

۴۵ اگر $\frac{\text{ٹان}(\text{ک}+\text{ا})}{\text{ن}} = \frac{\text{ٹان}(\text{ک}+\text{ب})}{\text{و}} = \frac{\text{ٹان}(\text{ک}+\text{ح})}{\text{ل}}$ تو

$\frac{\text{ن}+\text{و}}{\text{ن}-\text{و}}\text{ سن}^۲(\text{ا}-\text{ب}) + \frac{\text{و}+\text{ل}}{\text{و}-\text{ل}}\text{ سن}^۲(\text{ب}-\text{ح}) + \frac{\text{ل}+\text{ن}}{\text{ل}-\text{ن}}\text{ سن}^۲(\text{ح}-\text{ا}) =$

۴۶ اگر $\frac{\text{ٹان}^۲\text{ ک}}{\text{ٹان}^۲\text{ ا}} + \frac{\text{ٹان}^۲\text{ ع}}{\text{ٹان}^۲\text{ ب}} = ۱$ اور $\frac{\text{سن ک}}{\text{سن ا}} = \frac{\text{سن ع}}{\text{سن ب}}$ تو ثابت کرو

کہ $\text{سن ک} = \pm\frac{\text{سن ا}}{۴(۱+\text{کوس ا کوس ب})}$

۴۷ اگر $\frac{\text{سن}(\text{ک}-\text{ا})}{\text{سن}(\text{ک}-\text{ب})} = \frac{\text{ن}}{\text{و}}$ اور $\frac{\text{کوس}(\text{ک}-\text{ا})}{\text{کوس}(\text{ک}-\text{ب})} = \frac{\text{ن}'}{\text{و}'}$ تو

$\text{کوس}(\text{ا}-\text{ب}) = \frac{\text{ن ن}' + \text{و و}'}{\text{ن و}' + \text{ن}'\text{ و}}$

۴۸ اگر $\text{ٹان ع} = \frac{\text{سن ک} \mp \text{کوس ک}}{\text{سن ک} \pm \text{کوس ک}}$ تو $\text{ٹان}\frac{\text{ع}}{۲}$ ایک جواب $\text{ٹان}\frac{\text{ک}}{۲}\text{ ٹان}\left(\frac{\text{ط}}{۴} - \frac{\text{ک}}{۲}\right)$

۴۹ اگر $\text{کوس ک} = \text{کوس ا کوس ب}$ اور $\text{کوس ک}' = \text{کوس ا}'\text{ کوس ب}$ اور $\text{ٹان}\frac{\text{ک}}{۲}\text{ ٹان}\frac{\text{ک}'}{۲}$

$= \text{ٹان}^۲\frac{\text{ب}}{۲}$ تو ثابت کرو کہ $\text{سن}^۲\text{ ب} = (\text{سک ا} - ۱)(\text{سک ا}' - ۱)$

۵۰ اگر سن (ب + ج − ا) اور سن (ج + ا − ب) اور سن (ا + ب − ج) کی درمیان سلسلہ ہو تو ثابت کرو ٹان آ اور ٹان ب اور ٹان ج کے درمیان بھی سلسلہ ہوگا

۵۱ اگر کسی مثلث کے زاویوں کے سن کے درمیان وہی سلسلہ ہو تو نصف زاویوں کے کوٹینجنٹ کے درمیان وہی سلسلہ ہوگا۔

۵۲ اگر کسی مثلث کے زاویوں کے کوسن کی مربعوں کا مجموعہ برابر ایک کے تو سب سے بڑا اور سب سے چھوٹے زاویوں کا فرق = تیسری زاویہ کے۔

۵۳ اگر کسی مثلث کے زاویے آ ب ج ہوں اور سن (ا + $\frac{\text{ج}}{\text{۲}}$) = ن سن $\frac{\text{ج}}{\text{۲}}$ تو ثابت کرو

ٹان $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ ٹان $\frac{\text{ب}}{\text{۲}}$ = $\frac{\text{ن} - \text{۱}}{\text{ن} + \text{۱}}$

۵۴ اگر کسی مثلث کے زاویے ا ب ج ہوں اور سن $\frac{\text{ا}}{\text{ل}}$ = سن $\frac{\text{ب}}{\text{و}}$ = سن $\frac{\text{ج}}{\text{ن}}$ تو

(ن − و) کوٹ $\frac{\text{ج}}{\text{۲}}$ + (و − ل) کوٹ $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ + (ل − ن) کوٹ $\frac{\text{ب}}{\text{۲}}$ = ۰

۵۵ اگر ا + ب + ج = م پ جسمین م ایک صحیح عدد ہے تو ٹان آ + ٹان ب + ٹان ج = ٹان ا ٹان ب ٹان ج

۵۶ اگر ا ب ح کوئی زاویہ ہو تو ثابت کرو کہ سن ا + سن ب + سن ج − ۴ کوس $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ کوس $\frac{\text{ب}}{\text{۲}}$ کوس $\frac{\text{ح}}{\text{۲}}$ = ۲ سن $\frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{پ}}{\text{۴}}$ { کوس $\frac{\text{۳آ} - \text{ب} - \text{ج} + \text{پ}}{\text{۴}}$ + کوس $\frac{\text{۳ب} - \text{ا} - \text{ج} + \text{پ}}{\text{۴}}$

+ کوس $\frac{\text{۳ج} - \text{ا} - \text{ب} + \text{پ}}{\text{۴}}$ + کوس $\frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{پ}}{\text{۴}}$ }

ذیل کی مساواتون کا جواب نکالو

۱ سن لا + کوس لا = $\sqrt{۲}$ جواب لا − $\frac{پ}{۴}$ = ۲ن پ

۲ $\sqrt{۳}$ سن لا − کوس لا = $\sqrt{۲}$ جواب لا + $\frac{پ}{۳}$ = ۲ن پ ± $\frac{۳پ}{۴}$

۳ سن ۲ لا = کوس لا جواب $\frac{پ}{۲}$ − ۲ لا = ۲ن پ ± لا

۴ (۳ − $\sqrt{۳}$)(سک لا + کوسک لا) = ۴ (سن لا ٹان لا + کوس لا کوٹ لا)

جواب لا = ن پ + $\frac{۳پ}{۴}$ یا ۲ لا = ن پ + (−۱) $\frac{پ}{۳}$

۵ کوس لا − کوس ۲ لا = سن ۳ لا جواب $\frac{۳لا}{۲}$ = ن پ یا $\frac{پ}{۲}$ − $\frac{لا}{۲}$ = ۲ن پ
± $\frac{۳لا}{۲}$

۶ کوٹ لا − ٹان لا = کوس لا + سن لا جواب لا = ن پ + $\frac{۳پ}{۴}$ یا ۲ لا =
۲($\sqrt{۲}$ − ۱)

۷ ۲ سن^{۲} لا + سن^{۲} ۲ لا = ۲ جواب لا = (۲ن + ۱) $\frac{پ}{۲}$ یا ن پ ± $\frac{پ}{۴}$

۸ ٹان لا + ۲ کوٹ ۲ لا = سن لا (۱ + ٹان لا ٹان $\frac{لا}{۲}$) جواب لا = (۲ن + ۱) $\frac{پ}{۴}$

۹ سن^{۲} ۲ لا − سن^{۲} لا = سن^{۲} $\frac{پ}{۱۰}$ جواب لا = ن پ ± $\frac{پ}{۱۰}$ یا ن پ ± $\frac{۳پ}{۱۰}$

۱۰ کوسک لا = کوسک $\frac{لا}{۲}$ جواب $\frac{لا}{۲}$ = ن پ یا ۲ن پ ± $\frac{پ}{۳}$

۱۱ کوس لا کوس ۳ لا = کوس ۵ لا کوس ۷ لا جواب لا = $\frac{ن پ}{۸}$

۱۲ سس ۂ سس ۳ ۂ = $\frac{۱}{۲}$ جواب ۂ = ن پ ± $\frac{پ}{۴}$ ٹان پ ± $\frac{پ}{۶}$

۱۳ ۴ سس² ۂ + سس² ۲ ۂ = ۳ جواب ۂ = ن پ ± $\frac{پ}{۴}$

۱۴ (۱ − ٹان ۂ) (۱ + سس ۲ ۂ) = ۱ + ٹان ۂ جواب ۂ = ن پ ٹان پ + $\frac{۳پ}{۴}$

۱۵ سس ۂ + سس ۲ ۂ + سس ۳ ۂ + سس ۴ ۂ = ۰ جواب

سن $\frac{۵ۂ}{۲}$ = ۰ یا کوس ۂ = ۰ یا کوس $\frac{ۂ}{۲}$ = ۰

۱۶ سن ۂ − کوس ۂ = ۴ سس ۂ کوس² ۂ جواب

کوس ۂ + سس ۳ ۂ = ۰ یعنے کوس ۂ = کوس (۳ۂ + $\frac{پ}{۲}$)

۱۷ (کوٹ ۂ − ٹان ۂ)² (۲ − $\sqrt{۳}$) = ۴ (۲ + $\sqrt{۳}$) جواب ۲ ۂ = ن پ ± $\frac{پ}{۱۲}$

۱۸ ۲ $\sqrt{۲}$ کوس ($\frac{پ}{۴}$ − ۂ) (۱ + سس ۂ) = ۱ + کوس ۲ ۂ جواب

سس ۂ = − ۱ یا سس $\frac{ۂ}{۲}$ = ۰ یا ٹان $\frac{ۂ}{۲}$ = ۲

۱۹ سن ۹ ۂ + سس ۵ ۂ + ۲ سس² ۂ = ۱ جواب

۲ ۂ = (۲ن + ۱) $\frac{پ}{۲}$ یا ۷ ۂ = ن پ + (−۱)ن $\frac{پ}{۶}$

۱ اگر کسی مثلث کے ضلع لا² + لا + ۱ اور ۲لا + ۱ اور لا² − ۱ ہو تو ثابت کرو کہ سب سے بڑا زاویہ ۱۲۰° کا ہوگا۔

۲ اگر کوس ت = $\frac{\text{سں}}{\text{۲ س ر}}$ تو ثابت کرو کہ یہ مثلث متساوی الساقین ہوگا۔

۳ کسی مثلث قائمۃ الزاویہ مین جسکا زاویہ ت قایمہ ہے کوٹ $\frac{\text{ر}}{\text{۲}}$ = $\frac{\text{ڈ + ٹ}}{\text{ڑ}}$

۴ اگر ٹ ٹان ت ڑ ٹان ر = (ٹ + ڑ) ٹان $\frac{\text{ت + ر}}{\text{۲}}$ تو $\frac{\text{ٹ}}{\text{ڑ}}$ = $\frac{\text{کوس ت}}{\text{کوس ر}}$

۵ اگر کسی مثلث کے زاویے سلسلہ ضرب مین ہون کہ جسکی عام ضرب ۲ ہو تو ثابت کرو کہ سب سے بڑا ضلع اور مجموعہ کل اضلاع سے وہ نسبت ہوگی جو ۲ سن $\frac{\text{پ}}{\text{۱۴}}$ کو ایک کے ساتھ ہے

۶ اگر و ت ر کسی مثلث کے بیرونی زاویہ ہون

ڈ۲ ٹ ڑ ورس د + ۲ ڈ ڑ ورس ت + ۲ ڈ ٹ ورس ر = $(\text{ٹ ڑ ڈ})^2$

۷ اگر کسی مثلث اب ج کے ا زاویہ سے قاعدہ پر ا د عمود گرادین اور د سے تو د ط اور د ع عمود اب اور اج پر ڈالے تو ثابت کرو کہ اط × طب × کوس^2 ج =

اع × عج کوس^2 ب

۸ اگر اب ج کسی مثلث کے ضلع ہون اور اگر اونکی سامنے والہ زاویہ θ و ۲θ اور ۴θ ہون تو ثابت کرو کہ ٹاین^2 θ = $\left(\frac{\text{ب}^2}{\text{ا × ج}}\right)^2 - 1$

۹ اگر اب ج مثلث کا ج زاویہ منفرجہ ہو تو ثابت کرو کہ ٹاین آ ٹاین ب ایک سے کم ہے

۱۰ اگر ڈ ڑ ٹ کسی مثلث کے ضلع ہون اور وے سلسلہ جمع مین ہون تو ثابت کرو۔

$\text{کوس}^{\text{۱}}\,\frac{\text{و} - \text{ر}}{\text{۲}} = \text{۲}\,\text{س}\,\frac{\text{ت}}{\text{۲}}$ اور $\text{ڈ}\,\text{کوس}^{\text{۲}}\,\frac{\text{ر}}{\text{۲}} + \text{ٹ}\,\text{کوس}^{\text{۲}}\,\frac{\text{و}}{\text{۲}} = \frac{\text{۳ٹ}}{\text{۲}}$

۱۱ اگر کسی مثلث کے ب ج ضلع کو د نقطہ پر دو برابر حصونمین تقسیم کرین تو کوٹ با د

— کوٹ ب = ۲ کوٹ ا

۱۲ اگر کسی مثلث کا ایک زاویہ ایسے دو حصونین تقسیم کرین کہ اونکی سین مین وہی نسبت ہو جو اونکی نزدیک والے ضلعون مین ہے تو ثابت کرو کہ اونکی کوٹینجنٹ کا فرق = اونکی ضلعونکے سامنے والہ زاویونکے کوٹینجنٹ کے فرق سے -

۱۳ اگر کسی مثلث کے زاویونکا کوٹینجنٹ سلسلہ جمع مین ہو تو اوسکے ضلعونکا مربع بہی سلسلہ جمع مین ہوگا -

۱۴ اگر کسی مثلث کے قاعدہ کے سامنے والہ زاویہ اور مع نسبت قاعدہ اور ارتفاع کے معلوم ہو اوس زاویہ سے قاعدہ پر عمود ڈالنے سے جن دو حصونمین وہ زاویہ تقسیم ہوتا ہے اونکا ٹینجنٹ کیا ہوگا +

۱۵ اگر کسی مثلث کا قاعدہ تین ۳ برابر حصون مین تقسیم کرین اور ۱ح اور ۲ح اور ۳ح ان زاویون کا ٹینجنٹ جو کہ نقاط تقسیم اور قاعدہ کے سامنے والہ زاویہ سے ملا کر بنی ہین ہو تو ثابت کرو

$$\left(\frac{\text{۱}}{\text{۱ح}} + \frac{\text{۱}}{\text{۲ح}}\right)\left(\frac{\text{۱}}{\text{۲ح}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳ح}}\right) = \text{۴}\left(\text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{۲ح}^{\text{۲}}}\right)$$

۱۶ اگر کسی مثلث کے زاویونکا سائن سلسلہ جمع مین ہو تو سب سے بڑا اور سب سے چھوٹا زاویونکے

نصف کے ٹینجنٹ کا حاصل ضرب $\frac{۱}{۳}$ ہوگا۔

۱۷ اگر کسی مثلث کی رت ضلع کو ط نقطہ مین برابر تقسیم کرین اور و ط کو ملاوین تو ٹان

$$\text{و ط ت} = \frac{\text{۲ ٹ ر سن و}}{\text{ٹ}^{۲} - \text{ر}^{۲}}$$

۱۸ اگر آ ب ج کسی مثلث کے تینون زاویہ ہون اور کوٹ $\frac{\text{آ}}{۲}$ اور کوٹ $\frac{\text{ب}}{۲}$ اور کوٹ $\frac{\text{ج}}{۲}$ سلسلہ جمع مین ہو تو ثابت کرو کہ کوٹ $\frac{\text{آ}}{۲}$ کوٹ $\frac{\text{ج}}{۲}$ = ۳

۱۹ اگر کسی مثلث کے آ ب زاویون سے خطوط کھینچے جاوین کہ جو زاویون کو ایسے دو حصون مین تقسیم کرے کہ اون حصونکے سین مین وہ نسبت ہو جو ایک کو ن سے ہے اور اگر یہ خطوط و ال نقطہ مین تقاطع کرین تو ثابت کرو کہ و ج خواہ زاویہ ج کو دو برابر حصون مین تقسیم کرتا ہی خواہ ایسے دو حصون مین کہ جنکے سین مین وہی نسبت ہی جو کہ آ اور ن۲ سے ہی

۲۰ اگر ل لنبائی ہو اوس خط کے کہ جو زاویہ آ کو دو برابر حصونمین تقسیم کرتا ہے اور قاعدہ پہ زاویہ بناتا ہو تو ثابت کرو کہ مثلث کے کل ضلعونکا مجموعہ = $\frac{\text{۲ ل کوس}\frac{\text{آ}}{۲}\text{ سن ط}}{\text{سن ط} - \text{سن}\frac{\text{آ}}{۲}}$

۲۱ اگر کسی مثلث کا سب سے بڑا اور سب سے چھوٹا زاویہ ط اور ع ہو اور اوسکے ضلع سلسلہ جمع مین ہون تو ثابت کرو ۴ (۱ − کوس ط) (۱ − کوس ع) = کوس ط + کوس ع۔

ثابت کرو کہ مساوات ۲۲ سوال سے ۲۹ سوال تک

کسی مثلث مین صحیح ہے

۲۲ ڈال (ٹ کوس ر - ڑ کوس ت) = ٹ^{۲} - ڑ^{۲}

۲۳ ڈال (کوس ت کوس ر + کوس د) = ٹ (کوس د کوس ر + کوس ت) = ڑ (کوس د کوس ت + کوس

۲۴ (ٹ + ڑ - ڈ) ٹان $\frac{\text{ا}}{۲}$ = (ڑ + ڈ - ٹ) ٹان $\frac{\text{ت}}{۲}$ = (ڈال + ٹ - ڑ) ٹان $\frac{\text{ر}}{۲}$

۲۵ ٹ کوس ت + ڑ کوس ر = ڈ کوس (ت - ر)

۲۶ (ڈال + ٹ) کوس ر + (ٹ + ڑ) کوس و + (ڑ + ڈ) کوس ت = ڈ + ڑ + ٹ

۲۷ (ڈ^{۲} - ٹ^{۲}) کوٹ ر + (ٹ^{۲} - ڑ^{۲}) کوٹ د + (ڑ^{۲} - ڈ^{۲}) کوٹ ت = ۰

۲۸ (ڈ - ٹ) کوٹ $\frac{\text{ر}}{۲}$ + (ڑ - د) کوٹ $\frac{\text{ت}}{۲}$ + (ٹ - ڑ) کوٹ $\frac{\text{د}}{۲}$ = ۰

۲۹ ۱ - ٹان $\frac{\text{د}}{۲}$ ٹان $\frac{\text{ت}}{۲}$ = $\frac{۲\text{ڑ}}{\text{د + ت + ڑ}}$

۳۰ (ڈ + ٹ + ڑ) (کوس د + کوس ر + کوس ت) = ۲ڈ کوس^{۲} $\frac{\text{د}}{۲}$ + ۲ٹ کوس^{۲} $\frac{\text{ت}}{۲}$ + ۲ڑ کوس^{۲} $\frac{\text{ر}}{۲}$

۳۱ $\frac{\text{سن}^{۲}\ \text{د}}{۲\text{ڈ}}$ = $\frac{\text{کوس د کوس ت}}{\text{ڈ ٹ}}$ + $\frac{\text{کوس د کوس ر}}{\text{ڈ ڑ}}$ + $\frac{\text{کوس ت کوس د}}{\text{ٹ ڈ}}$

۳۲ ڈ کوس د + ٹ کوس ت + ڑ کوس ر = ۲ڈ سن ت سن ر

۳۳ کوس د + کوس ت + کوس ر = ۱ + $\frac{۲\text{ڈ سن ت سن ر}}{\text{ڈ + ڑ + ٹ}}$

۳۴ ڈ^{۲} - ۲ڈٹ کوس (۶۰° + ر) = ڑ^{۲} - ۲ٹڑ کوس (۶۰° + د)

۳۵ $\frac{\text{کوٹ د}}{۴}$ - $\frac{\text{کوک د}}{۲}$: کوٹ $\frac{\text{ٹ}}{۲}$ + کوٹ $\frac{\text{ر}}{۲}$ :: ٹ + ڑ - ڈ : ۲ڈ

۳۶ کوس^{۲} $\frac{\text{د}}{۲}$ کوس^{۲} $\frac{\text{ت}}{۲}$ کوس^{۲} $\frac{\text{ر}}{۲}$ = ۳ع (ع - کوس $\frac{\text{د}}{۲}$) (ع - کوس $\frac{\text{ت}}{۲}$) (ع - کوس $\frac{\text{ر}}{۲}$)

اسمین ۲ع = کوس $\frac{و}{۲}$ + کوس $\frac{ت}{۲}$ + کوس $\frac{ر}{۲}$

۳۷ کسی مثلث کے ضلعون کا مجموعہ = ۴ر کوس $\frac{و}{۲}$ کوس $\frac{ت}{۲}$ سک $\frac{و+ت}{۲}$

۳۸ اگر ل سن^۲ و + ن سن^۲ ت = و سن^۲ ت + ل سن^۲ ر = ن سن^۲ ر + و سن^۲ د

تو ن : ل : و :: سن ۲ و : سن ۲ ت : سن ۲ ر

۳۹ سن $\frac{و}{۲}$ سن $\frac{ت}{۲}$ سن $\frac{ر}{۲}$ کم ہے ایک سے سوای اوس حالت کے کہ جب و = ت = ر

۱ اگر سن ت = ۲۵ء اور ڈ = ۵ تَ = ۵ء۲ تو زاویہ د کی مقادیر کیا ہونگی

جواب و = ۳۰° یا ۱۵۰°

۲ اگر کسی مثلث کا ایک ضلع دوسرے سے دوچند ہو اور زاویہ درمیانی ۶۰° کا ہو تو باقی زاویے کیا ہونگے

جواب ۳۰° او ۹۰°

۳ اگر کسی مثلث کے ضلعوں میں وہ نسبت ہو جو ۲ اور $\sqrt{۶}$ اور ۱ + $\sqrt{۳}$ سے ہے تو اونکے زاویوں کو دریافت کرو

جواب ۴۵° و ۶۰° و ۷۵°

۴ اگر و = ۴۵° ڈ = ۴ اور ٹ = ۴ + $\sqrt{۸}$ تو مثلث کو دریافت کرو۔

جواب ت = ۹۰° ر = ۴۵° اور ڑ = $۴\sqrt{(۵ + ۲\sqrt{۵})}$

۵ اگر و = ۳۰° ٹ = ۱۰۰ اور ڈ = ۴۰ ہو تو اسکا مثلث دریافت ہو سکتا ہے یا نہیں۔

جواب مثلث غیر ممکن ہے

۶ اگر د = ۴۵° آڈ = ۴ اور ٹ = ۴ + ۴۴۴ تو مثلث کی باقی ضلع اور زاویہ دریافت کرو۔

جواب زاویہ ت = ۴۵° یا ۱۳۵°

۷ اگر د ٹ اور ر معلوم ہوں اور ڈ چھوٹا ہو ٹ سے اور اگر ڑ۱ اور ڑ۲ تیسرے ضلع کی دو مقداریں ہوں

تو ڑ۱² − ۲ ڑ۱ ڑ۲ کوس ۲ د + ڑ۲² = ۴ ڈ² کوس² د

۸ حالت مشتبہ میں دریافت کرو کہ دونوں مثلث کے سطح کا مجموعہ کیا ہوگا۔

جواب ٹ² سن د کوس د

۹ اگر حالت مشتبہ میں دو مثلث کے زاویہ ت۱ اور ر۱ اور ت۲ اور ر۲ ہوں

$$\text{تو } \frac{\text{سن } ر_1}{\text{سن } ت_1} + \frac{\text{سن } ر_2}{\text{سن } ت_2} = ۲ \text{ کوس } د$$

۱۰ اگر حالت مشتبہ میں ایک مثلث کے سطح دوسرے مثلث سے ن گونہ ہووے

تو ثابت کرو کہ اگر ٹ دیے ہوئے ضلعوں میں سے بڑا ہو اور ڈ چھوٹا ہو تو $\frac{ٹ}{ڈ}$ ایک سے

بڑا ہے مگر $\frac{ن+۱}{ن-۱}$ سے چھوٹا ہے

۱۱ اگر ل ڈ + ۱۰ = ل ٹ + ل سن د تو اس حالت میں یہ مثلث مشتبہ ہی یا نہیں۔

جواب نہیں مگر یہ مثلث قائمۃ الزاویہ ہے زاویہ ۸ کوس ۸ = $\frac{ڈ-ٹ}{ڑ}$ مساوات سے دریافت

کر کے ثابت کرو کہ کسی مثلث

$$۱۲ \quad \text{کوس } \frac{د-ت}{۲} \text{ برابر } \frac{(ڈ+ٹ)\text{ سن } ۸}{۲\sqrt{ڈٹ}} \text{ اور کوس } \frac{د+ت}{۲} = \frac{ڑ \text{ سن } ۸}{۲\sqrt{ڈٹ}}$$

۱۳ اگر ٹان ع = $\frac{۲ (ڈ ٹ)^{\frac{۱}{۲}}}{ڈ - ٹ}$ سن $\frac{ر}{۲}$ تو ڑ = (ڈ − ٹ) سک ع

۱۴ $\overline{ڈ}\,\overline{ت}\,\overline{ر}$ مثلث مین اگر ڈ = ۱۸ اور ٹ = ۲۰ اور ڑ = ۲۲ تو دریافت کرو ل ٹان $\frac{ڈ}{۲}$ کیا ہوگا جبکہ معلوم ہو کہ $ل_{۱۰}$ ۲ = ٫۳۰۱۰۳۰۰ اور $ل_{۱۰}$ ۳ = ٫۴۷۷۱۲۱۳

۱۵ اگر کسی مثلث کے تینون ضلع ۳۲ اور ۴۰ اور ۶۶ ہون تو سب سے بڑا زاویہ دریافت کرو جبکہ معلوم ہو کہ $ل_{۱۰}$ ۲۰۷ = ۲٫۳۱۵۹۷۰۳ اور $ل_{۱۰}$ ۱۰۷۳ = ۳٫۰۳۰۵۹۹۷ ل کوٹ ۴۹° ۱۸′ = ۹٫۶۴۲۴۳۴۲ اور فرق ۱′ = ٫۰۰۰۳۴۳۳

۱۶ اگر کسی مثلث کے ضلع چار اور پانچ و چھہ ہون تو زاویہ ت دریافت کرو جبکہ معلوم ہو $ل_{۱۰}$ ۲ = ٫۳۰۱۰۳۰۰ اور ل کوس ۲۶° ۳۴′ ۵″ = ۹٫۹۴۹۶۴۰۴ اور فرق ۱′ = ٫۰۰۰۰۶۶۹

۱۷ اگر کسی مثلث کے ضلع پانچ چھہ سات فیٹ ہو تو سب سے بڑا زاویہ کوس $\frac{ر}{۲} = \sqrt{\frac{ح(ح - ڑ)}{ڈ ٹ}}$ اعشاریہ سے دریافت کرو جبکہ معلوم ہو $ل_{۱۰}$ ۶ = ٫۷۷۸۱۵۱۳ اور ل کوس ۳۹° ۱۴′ = ۹٫۸۸۹۰۶۴ اور فرق ۶۰″ = ٫۰۰۰۱۰۳۲

۱۸ اگر کسی مثلث کے دو ضلع ۱۸ اور ۲ فیٹ ہون اور زاویہ درمیانی ۵۵° تو باقی زاویہ دریافت کرو جبکہ معلوم ہو $ل_{۱۰}$ ۲ = ٫۳۰۱۰۳۰۰ اور ل کوٹ ۲۷° ۳۰′ = ۱۰٫۲۸۳۵۲۳۳ اور ل ۵۶° ۵۴′ = ۱۰٫۱۸۶۳۷۶۹ اور فرق ۱′ = ٫۰۰۰۲۷۶۳

۱۹ کسی مثلث کے دو ضلعوں میں وہ نسبت ہی جو کہ ۹ کو سات کے ساتھ ہی اور زاویہ درمیانی ۶۴° ۱۲′ کا ہے تو باقی زاویہ دریافت کرو جبکہ معلوم ہو ل$_{۱۰}$۲ = ٫۳۰۱۰۳۰۰ اور ل ٹان ۵۷° ۵۴′ ۵″ = ۱۰٫۲۰۲۵۳۵۵ اور ل ٹان ۱۱° ۱۶′ = ۹٫۲۹۹۴۲۱۶ اور ل ٹان ۱۱° ۱۷′ = ۹٫۲۹۹۹۰۰۴

۲۰ اگر ڈ = ٫۱ اور ٹ = ٫۰۵ اور ر = ۳۶° ۵۲′ ۱۲″ تو باقی زاویوں کو دریافت کرو جبکہ ل$_{۱۰}$۳ = ٫۴۷۷۱۲۱۳ اور ل کوٹ ۱۸° ۲۶′ ۶″ = ۱۰٫۴۷۷۱۲۱۳

۲۱ کسی مثلث کے دو زاویوں میں وہ نسبت ہے جو کہ ۹ کو سات سے ہے اور زاویہ درمیانی ۴۷° ۲۵′ تو باقی زاویے دریافت کرو۔ جبکہ معلوم ہو ل$_{۱۰}$۲ = ٫۳۰۱۰۳۰۰ اور ل ٹان ۶۶° ۱۷′ ۳۰″ = ۱۰٫۳۵۷۳۹۳۲ ل ٹان ۱۵° ۵۳′ = ۹٫۴۵۴۱۴۷۹ اور فرق ۱′ = ٫۰۰۰۴۷۹۷

۲۲ اگر ایک مثلث میں ڈ = ۳۰ ٹ = ۲۰ اور زاویہ درمیانی ۲۲° ہو تو باقی زاویے دریافت کرو جبکہ معلوم ہو کہ ل کوٹ ۱۱° = ۱۰٫۷۱۱۳۴۷۷ ل ٹان ۴۵° ۴۸′ = ۱۰٫۰۱۲۱۲۹۴ ل ٹان ۴۵° ۴۹′ = ۱۰٫۰۱۲۳۸۲۱ اور ل$_{۱۰}$۲ = ٫۳۰۱۰۳۰۰

۲۳ اگر ٹ = ۱۳ ڑ = ۱۱ و = ۶۰° تو ثابت کرو کہ ٹ = ۷۱° ۳۴′ ۲۹″ جبکہ معلوم ہو کہ ل ٹان ۱۱° ۳۴′ ۲۹″ = ۹٫۳۱۷۷۴ اور ل$_{۱۰}$۲ = ٫۳۰۱۰۳۰۰ اور ل$_{۱۰}$۳ = ٫۴۷۷۱۲

۲۴ کسی مثلث کے ضلع ۷، ۸، ۹ ہیں تو تینوں زاویوں کو دریافت کرو جبکہ معلوم ہو ل$_{۱۰}$۲ = ٫۳۰۱۰۳۰۰

ل ٹان ۴۲° ۵′ ۴۰″ = ۹٫۹۶۵۰۰۶۹ ل ٹان ۴۲° ۵′ ۵۰″ = ۹٫۹۶۵۰۵۶۳۴

ل ٹان ۲۹° ۲′ ۲۰٫۱ = ۹٫۷۴۴۳۹۸۳ ل ٹان ۲۹° ۱۲′ ۳۰″ = ۹٫۷۴۷۴۶۷۷

۲۵ اگر کسی مثلث قائمۃ الزاویہ کے قائمہ کے سامنے والہ ضلع ڑ = ۳۶۹۵۲ اور ٹ = ۳ تو زاویہ ٹ کو دریافت کرو جبکہ معلوم ہو کہ ل$_{۱۰}$ ۴۷۵۴۳ = ۴٫۶۷۷۰۹۳۴۸ ل$_{۱۰}$ ۳۶۹۵۳ = ۴٫۵۶۷۶۲۱۴۸۸

ل سن ۴۴° ۵۹′ ۱۵″ = ۹٫۸۴۹۳۹۰۲ اور فرق ۱′ = ۰٫۰۰۰۰۱

۲۶ اگر کسی مثلث کے دو ضلع ۸۰ اور ۱۰۰ فٹ کے ہوں اور زاویہ درمیانی ۶۰° تو باقی زاویے دریافت کرو جبکہ معلوم ہو ل$_{۱۰}$ ۳ = ۰٫۴۷۷۱۲ اور ل ٹان ۱۰° ۵۳′ ۳۶″ = ۹٫۲۸۴۳۳۲

۲۷ اگر کسی مثلث کے دو ضلع ۳ اور ۵ فٹ ہوں اور زاویہ درمیانی ۱۲۰° ہو تو باقی زاویے دریافت کرو جبکہ معلوم ہو ل$_{۱۰}$ ۴٫۸ = ۰٫۶۸۱۲۴۱۲ ل ٹان ۸° ۱۲′ = ۹٫۱۵۸۶۷۰۶ اور فرق ۶۰″ = ۰٫۰۰۰۸۹۴

۲۸ اگر ایک شکل مخروطی کا آثار مربع کہ جسکا ایک ضلع ۲۰۰ فٹ کا ہو اور ہر ایک کنارہ ۱۵۰ فٹ کا تو ہر ایک دیوار کے جھکاؤ کو دریافت کرو جبکہ معلوم ہو ل$_{۱۰}$ ۲ = ۰٫۳۰۱۰۳ ل ٹان ۲۵° ۳′ ۳″ = ۹٫۶۶۹۸۸۶۸ ل ٹان ۲۵° ۳′ ۳″ = ۹٫۶۶۹۹

۲۹ اگر $\frac{ٹ}{ط}$ = ۲٫ار = ۶۰° ل$_{۱۰}$ ۳ = ۰٫۴۷۷۱۲۱۳ ل کوٹ ۹° ۴۳′ = ۹٫۶۹۱۸۶۹۴ اور فرق ۱′ = ۰٫۰۰۰۷۵۱۴ تو باقی زاویوں کو دریافت کرو

۴۰ اگر ب ـ آ = ۳ ل سن ج = ۹٫۵۲۲۰۸۷۸۷ اور ل۱۰ ۳ = ۰٫۴۷۷۱۲۱۳ تو زاویہ ٹ دریافت کرو

۴۱ اگر کسی مثلث کا قاعدہ اور ارتفاع اور قاعدون کے زاویونکا فرق معلوم ہو تو ثابت کرو کہ کس طرح مثلث کی باقی جزو معلوم ہو سکتے ہین۔

۴۲ اگر کسی مثلث کے تینون زاویون سے سامنے والے ضلعونکا عمود معلوم ہو تو مثلث کے کل ضلعے اور زاویے کیونکر دریافت ہو سکتے ہین۔

۱ ایک مقام ت سے جو زیر کسی پہاڑ کے واقع ہے دریافت ہوا کہ اوسکے چوٹی ۶۰° کے ارتفاع پر ہے اور بعد چلنے ایک میل جانب چوٹی مذکورہ کے مقام ر پر جو ایسے سطح پر واقع ہے کہ سطح افقی سے ۳۰° کا زاویہ بناتا ہے زاویہ ت ر د دریافت ہوا ۱۳۵° ہے تو بلندی اوس پہاڑ کی کیا ہوگی۔

۲ اگر کسی برج کے پایین سے ایک سطح افقی پر ۱۰۰ گز کے فاصلہ پر اوسکی چوٹی ۳۰° کی پائی جاوے تو ارتفاع برج کی کیا ہوگی۔

۳ ایک برج کے خاص ون پورب کیطرف مقام د پر اوسکے بلندی ۳۰° دریافت ہوا اور د سے خاص پچھم کیطرف آ فاصلہ پر ت مقام سے ۱۵° کی بلندی دریافت ہوا تو ثابت کرو کہ برج کی بلندی = $\frac{ا}{\left(۲\sqrt{۳} + ۲\right)}$

۴ اگر ایک سطح افقی پر ایک برج مع مینار واقع ہو اور کوئی شخص اوس برج سے ا فٹ کی

فاصلہ پر وہ برج اد ۔ ایک پہاڑ کی چوٹی کو ایک خط راست مین دیکھی اور برج کے ب فٹ فاصلہ پر اوس شخص کو دریافت ہو کہ مینار اوسکی نظر مین وہی زاویہ رکھتا ہی جو کہ پہلے دیکھاتھا اور اوسکے چوٹی پہاڑ کی چوٹی سے ایک خط راست مین ہے تو ثابت کرو کہ اگر بلندی سطح افقی سے جو کہ اوس کی آنکہہ سے گذرتی ہے ج فٹ ہو تو اونچائی پہاڑ کی اوسی سطح سے $\frac{\text{اب ج}}{\text{ج} - \text{ل}}$ فٹ ہوگا۔

۵ اگر ایک شخص کسی جگہہ سے ایک برج کا فاصلہ دریافت کرنا چاہے کہ جہان وہ پہونچ نہین سکتا ہے اور سطح افقی پر تین جگہہ سے دریافت ہوا کہ زاویہ بلندی برج کا ہر سہ مقام سے یکسان ہے تو ثابت کرو کہ فاصلہ کس طرح دریافت ہو سکتا ہے ۔

۶ ایک شخص او ب و ج مقامون مین فاصلہ دریافت کرنیکو جہان وہ پہونچ نہین سکتا ہی اب کے درمیان ایسے مقام پر کہڑا ہو جہان سے وہ اور اب مقام ایک سیدہ مین ہی اور وہانسے ایسی جانب کو چلا کہ جو اب پر عمود ہے اور اس خط مین فاصلون کو دریافت کیا جہان سے ج اور ب ج اوسکے سات ایک سیدہ مین ہین اور ان مقامات سے اس خط عمود کی ساتھہ اون جگہونکا زاویہ بہی دریافت کیا تو ثابت کرو کہ اون مقامونکا فاصلہ کسطرح دریافت ہو سکتا ہے ۔

۷ دو بلیان اب اور ج د کسی دریا کے ایک کنارے پر ایسی کہڑی کی گئی ہین کہ

فاصلہ اج = اب کے اور اونچائی ج د کی ایسی ہے کہ ایک مقام س سے جو دوسرے کنارہ پر آ کے خاص سامنے ہے اب اور ج د کی زاویے یکسان ہوں تو ثابت کرو کہ دریا کی چوڑائی کا مربع = $\frac{\text{اب}^4}{\text{ج د}^2 - \text{اب}^2}$ اور مقام س سے آد اور ب ج کا زاویہ ایک ہے۔

۸ ایک جھنڈا الف ٹ اونچائی کا ایک برج ب فٹ اونچائی پر کھڑا ہے تو دریافت کرو کہ سطح افقی پر جو برج کے پائین سے گذرتی ہے وہ کونسا مقام ہے جہاں سے برج اور جھنڈا برابر زاویہ میں نظر آوے اور دیکھنے والے کی آنکھہ کی اونچائی ق فٹ ہے۔

۹ ایک سطح افقی پر ایک برج شمال کیطرف جھکا ہوا ہے اور دو مقام پائین سے خاص عکس کیطرف ا اور ب فاصلہ پر برج کی چوٹی ج اور ع زاویہ کی بناتی ہیں پس یہ ثابت کرو کہ اگر برج کا جھکاو ط ہو اور چوٹی سی سطح افقی پر جو عمود کھینچا جاوے اوس کی اونچائی و فٹ ہو تو ٹان ط = $\frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{ب کوٹ ج} - \text{ا کوٹ ع}}$ اور و = $\frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{کوٹ ج} - \text{کوٹ ع}}$

۱۰ اگر الف ٹ اونچی کوئی شے ایک برج پر ہو اور برج کے پائین سے جو سطح افقی گذرتی ہے اوس پر ب فٹ کی فاصلہ سے وہ شے ط زاویہ بناتی ہے تو دریافت کرو کہ برج کی اونچائی کیا ہے۔

۱۱ ایک دریا کے کنارے پر دو سو فٹ اونچا ایک ستون ہے جس پر ۴۰ فٹ اونچی ایک

مورت بنی ہوئی ہے اور اگر ایک شخص دریا کے دوسرے کنارے پر سے اوس مورت کو اور ایک شخص چہ فٹ اونچا جو ستونکی پائین کھڑا ہے برابر زاویونمین دیکھی تو دریافت کرو کہ دریا کی چوڑائی کیا ہوگی۔

۱۲ ایک مکان کی اونچائی سامنے والے مکان کی کھڑکی سے ایک زاویہ قائمہ بناتی ہے اور چوڑائی مکان کی خط افقی سے ۶۰° کا زاویہ بناتی ہے اگر چوڑائی سڑک ۲۰ فیٹ ہو تو مکان کی بلندی کیا ہوگی۔

۱۳ دو ستون برابر اونچائی کی ہین ایک شخص نے اونکی درمیان ایک مقام سے جو اونکے پائین کے ملانے والے خط پر واقع ہے ستون متصلہ کی ارتفاع ۶۰° دریافت کی اور اس ملانے والے خط کے عمود پر ۲۰ فٹ چلکر ان دونون کی اونچائی ۴۵° اور ۳۰° دریافت ہوئی تو ستونکی اونچائی کیا ہوگی۔

۱۴ اگر کسی شے کے پائین سے ایک خط افقی کھینچا جاوے اور اس خط کے تین مقام پر ا اور ب اور ج سے اوس کا زاویہ بلندی دریافت ہو اور اگر زاویہ ب مقام کا ا مقام سے دو چند ہو اور ج کا ا سے سہ چند ہو اور $\overline{اب} = س$ اور $\overline{بج} = ص$ کے ہو تو ثابت کرو کہ اونچائی اوس شے کی $\frac{س}{۲ص}\sqrt{(س+ص)(۳ص-س)}$ ہے اور اگر ا مقام سے زاویہ کا ٹینجنٹ $\frac{۱}{۳}$ ہو تو ثابت کرو کہ ۵س = ۱۳ص

۱۵ ایک برج جسکا پائین اوسی سطح افقی پر ہے کہ جس پر ایک دیکھنے والا کھڑا ہے ایک مقام آ سے دریافت کیا کہ وہ برج خاص شمال کی طرف ہے اور ۳۰° کا زاویہ بناتا ہے دیکھنے والا بعد اوسکے سو گز چلا ایسا کہ ہر موقع پر اوس برج کا زاویہ یکساں تھا تب دریافت ہوا کہ برج اوتر اور پورب کے کونے پر ہے تو برج کی اونچائی اور اوسکا فاصلہ آ مقام سے دریافت کرو

۱۶ ایک شخص نے ایک سیدھی سڑک پر چلتے ہوئے دریافت کیا کہ ایک مقام پر دو شے سب سے بڑا زاویہ ط بناتی ہیں اوس مقام سے ج فاصلہ پر جاکر دیکھا کہ دونوں شے ایک معلوم ہونے لگی اور سڑک سے زاویہ ع پر ہے تو ثابت کرو کہ فاصلہ درمیانی = $\frac{۲ج سن ط سن ع}{سن ط + سن ع}$

۱۷ ایک قلعہ جہاز سے پورب اوتر پورب کے گوشہ میں دیکھا گیا اور بعد چار میل خاص پورب طرف چلکر وہی قلعہ اوتر اوتر پورب کے گوشہ میں نظر آیا تو ثابت کرو کہ فاصلہ قلعہ کا پہلے مقام سے $\sqrt{۱۹۶ + ۸۴\sqrt{۲}}$ میل اور دوسرے مقام سے $۲(۱۹ - ۸\sqrt{۲})$

۱۸ ایک جہاز پر سے جہازیوں نے اوتر کی طرف جاتے ہوئے دو مینار روشنی نما ایک خط میں پچھم کی طرف دیکھے اور بعد روانی ایک گھنٹہ کے وہی مینار دکھن اور پچھم اور دکھن دکھن پچھم کے گوشہ میں نظر آئے اگر میناروں کے درمیان ۸ میل کا فاصلہ ہو تو جہاز کس حساب سے چل رہا تھا۔

۱۹ ایک جہاز کے مستول پر سے جو سمندر کی سطح سے ۴۰ فٹ اونچا ہے ایک مینار کی

روشنی خاص دائرہ افقی مین نظر آئی اور اوسی روشنی کیطرف ۳۰ منٹ چلکر جہاز کے
چہتے پر سے جو سمندر کی سطح سے ۱۶ فٹ اونچائی پر ہے وہی روشنی سابقہ نظر پڑی
فرض کرو کہ زمین ایک کرہ ہے کہ جسکا فاصلہ سطح سے مرکز تک ۴۰۰۰ میل ہے تو دریافت کرو
کہ جہاز کس شتاب سے چل رہا تھا

۲۰ ایک شخص کسی پہاڑ پر ایسی راہ سے چڑہ گیا کہ جو پائین سے چوٹی تک سیدہا ہونے سے کم فاصلہ
رکھتی ہے اور راہ کا جہکاؤ سطح افقی سے اول مین ل زاویہ تہا لیکن تہوڑی دور کے بعد
آگے کا جہکاؤ بڑہ کر ب ہوگیا اور اسیطرح پر رہا چوٹی پر پہونچکر اوس نے پرانشر سے دریافت کیا
کہ وہ ن فٹ اونچائی پر پہونچ گیا ہے اور وہان سے دریافت کیا کہ مقام کوچ کا ج زاویہ
کی جہکاؤ پر ہے تو ثابت کرو کہ فاصلہ چڑہائی کا $\frac{ن\ کوس\left(\frac{ل+ب}{۲}-ج\right)}{کوس\ \frac{ب-ل}{۲}\ سن\ ع}$

۲۱ اگر ایک سطح افقی پر دو مقام سے ایک شے زاویہ بَ اور ب اونچائی پر دکہلائی دیوے
اور اگر ایک تیسرے مقام سے جو ان دونون مقامون کی ملانے والی سیدہی خط پر
واقع ہے اور ان سے جَ اور جً کے فاصلہ پر ہے زاویہ ط کے اونچائی پر نظر آوے
تو ثابت کرو کہ اوس شے کی اونچائی سطح افقی سے

$$سن\ بَ\ سن\ بً\ سن\ ط\ \left(جَ\ جً\ (جَ+جً)\right)$$

$$\left\{جً\ سن^{۲}\ بَ\ (سن^{۲}\ ط - سن^{۲}\ بً) + جَ\ سن^{۲}\ بً\ (سن^{۲}\ ط - سن^{۲}\ بَ)\right\}^{\frac{۱}{۲}}$$

۲۲ ایک شخص نے ایک سیدھی راہ پر چلتے ہوئے دو پہاڑوں کی چوٹی کو جو ایک دوسرے کے سامنے ہیں لیکن ایک پہاڑ دوسرے سے کچھ آڑ پر ہے زاویہ ب ب اونچائی پر دیکھا بعد ج میل چلنے کے پیچھے والا پہاڑ یکبارگی چھپ گیا اور سامنے والے پہاڑ کی اونچائی کو دریافت کرنے سے معلوم ہوا کہ ط زاویہ کی اونچائی پر ہے تو دریافت کرو کہ دونوں پہاڑ کی اونچائی کیا ہے۔

۲۳ ایک برج خندق مدور سے گھرا ہے کسی روز دوپہر کے وقت برج کی چوٹی کا سایہ خندق کے کنارہ سے ۴۵ فٹ باہر نکلا نظر آیا ہے اور اوسی روز جبکہ آفتاب خاص پچھم ہو جاتا ہے تو سایہ خندق کے کنارہ سے ۱۲۰ فٹ کے فاصلہ پر ملتا ہے ان دونوں سایوں کے سرے کا فاصلہ ۳۵ فٹ ہے اور برج کی بلندی کا زاویہ خندق کے کنارہ پر کسی مقام سے ۶۰ درجہ ہے اونچائی برج دریافت کرو اور آفتاب کی سمت ارتفاع دوپہر کے وقت کیا ہوگی۔

۲۴ ایک برج کسی سطح خمیدہ کی ا مقام پر واقع ہے اور اوس کے ایک مقام ج سے وہ برج زاویہ ط پر نظر آتا ہے اور ایک مقام د سے جو خط اج پر ایسا واقع ہے کہ ج د = اج کے وہی برج زاویہ ع پر دیکھا گیا اگر برج اور سطح کا آج درمیانی زاویہ ک ہو تو ثابت کرو

کہ کوٹ ک = ۲ کوٹ ط - کوٹ ع

۲۵ اگر ایک مثلث و ت ر کا زاویہ د = ۳۰° ٹ = ۳ ۴ $\sqrt{۳}$ اور ڈ = ۳ تو باقی ضلع اور زاویہ

کیا ہونگے اور اگر فرض کرین کہ غلطی ۲″ زاویہ ہ کے دریافت کرنیمین ہوئی ہو تو
زاویہ ت مین کسقدر غلطی ہوگی —

۲۹ اگر کسی دریاکے ایک کنارہ پر دو مقامون کا فاصلہ جَ ہو اور دوسرے کنارہ پر کہین اوسقدر فاصلہ ناپ لیا جاوے اور اسکی دونون حدون پر ج زاویہ ط اور ع بناتا ہو اور دریاکے دونون کنارہ متوازی ہون تو دریافت کرو کہ اوس کی چوڑائی کیا ہوگی

۳۰ ایک پہاڑ پر ایک قلعہ بشکل مربع ہے کسی شخص نے اوسکی چوڑائی دریافت کرنیکو ایک کنارہ کے خاص دکھن طرف ایک مقام سے دریافت کیا کہ قلعہ کے سامنے والی دیوار زاویہ ط بناتی ہے اور پہلے مقام سے خاص پچھم اَ فٹ چلکر دریافت کیا کہ وہی دیوار مثل پہلے کے زاویہ بناتی ہی اور وہان سے بَ فٹ فاصلہ پر چلکر وہ شخص اوس دیوار کے دوسرے کنارہ سے خاص دکھن طرف ہوگیا تو ثابت کرو کہ چوڑائی قلعہ کی (ا + ب) سا ع فٹ

جبکہ $$\text{ٹان ع} = \frac{\text{ب ٹان ط}}{\text{ا} + \text{ب}}$$

۲ ب بَ یہ دو پہاڑون کی چوٹی ہین اور ب ج ایک سیدھا خط افقی ہے اگر نزدیک والی چوٹی سڑک کے کسی مقام پر کھڑی ہونے سے کسی دوسرے چوٹی کو چھپا لیوے تو ثابت کرو کہ سن طَ سن غ = سن ط سن ع اسمین ب کی اونچائی طَ ہے جو سڑک پر کسی مقام نَ سے نظر آتی ہے اور ع زاویہ ب ن ج ہے اور ط ع اسی قسم کی مقدارین ہین

جو چوٹی ب نشان کی نسبت سڑک کے ن مقام سے دیکھہ پڑتے ہین۔

۲۹ آ اور ب دو شئے ایک سطح افقی پر واقع ہے اور اوسی سطح پر ایکمقام م سے آب زاویہ ط بناتا ہین اور مقام م سے دو شخص اوسی سطح پر ایسے جانب چلے جو م ا اور م ب کے ساتھہ زاویہ قائمہ بناتا ہے اور یہان مقام ن و سے دریافت کیا کہ آب زاویہ ظ بناتا ہے اگر فاصلہ م ن اور م و معلوم ہو تو آب کی لنبائی دریافت کرو

۳۰ اج ب ۳ مقام ایک سطح پر ہین اج = ج ب اور اج اور ج ب سے ایک زاویہ قائمہ بنتا ہے اور اوسی سطح پر ایک مقام م سے اج اور ج ب زاویہ ط اور ع بناتے ہین اگر اوسی سطح پر دوسرے مقام مَ نشان سے جو م سے د فاصلہ پر ہے اور ایسا کہ م مَ اور ج م زاویہ قائمہ ہے اج اور ج ب زاویہ ظ اور عَ بناتے ہین تو اب کا فاصلہ دریافت کرو

۳۱ ایک شخص ندی کے کنارہ سے دوسرے کنارہ پر ایک برج کی چوٹی کو ساتھہ اوس خط افقی کی ہو کہ اوسکی آنکھہ سے گذرتا ہے ۵۵ درجہ کا زاویہ بناتی ہوئی دیکھا ۳۰ فٹ پیچھے ہٹ کر اوس نے اوسکو ۴۸ کا زاویہ بناتے دیکھا تو ندی کی چوڑائی دریافت کرو جبکہ معلوم ہو کہ ل سن ۷° = ۹٫۰۸۵۸۹

ل سن ۳۵° = ۹٫۷۵۸۵۹ ل سن ۴۸° = ۹٫۸۷۱۰۶ ل ۳ = ۰٫۴۷۷۱۲

ل ۱۰٫۴۹۲ = ۱٫۰۲۰۰۹

۳۲ ایک برج ۱۰۰ فٹ اونچا اوس سطح افقی پر کہ جس پر واقع ہے ۷۰ فٹ سایہ گراتا ہے